TD 1

Exercice 1

1). $$I = \int \frac{x^2 \ln x \, dx}{(x^3+1)^3} = \left| \begin{array}{ll} \text{intégration par parties :} & \\ u = \ln x, & dv = \dfrac{x^2 dx}{(x^3+1)^3} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = -\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(x^3+1)^2} \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int v\,du = -\frac{1}{6}\frac{\ln x}{(x^3+1)^2} + \frac{1}{6}\underbrace{\int \frac{dx}{x(x^3+1)^2}}_{\text{notons cette intégrale } I_0}$$

$$I_0 = \int \frac{dx}{x(x^3+1)^2} = \int \frac{x^2\,dx}{x^3(x^3+1)^2} = \left| \begin{array}{l} t = x^3+1 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t-1)t^2} = \left| \begin{array}{l} \text{puisque } \dfrac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)} = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{1}{t-\alpha} - \dfrac{1}{t-\beta}\right), \\ \text{on a } \dfrac{1}{t(t-1)} = \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t} \\ \text{en choisissant } \alpha = 1, \beta = 0 \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t(t-1)} - \frac{1}{t^2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{3}\left\{\ln(t-1) - \ln t + \frac{1}{t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\ln x^3 - \ln(x^3+1) + \frac{1}{x^3+1}\right\} = \ln x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x^3} - \ln(1+x^3)\right)$$

On obtient donc :

$$I = -\frac{1}{6}\frac{\ln x}{(x^3+1)^2} + \frac{1}{6}I_0 = -\frac{1}{6}\frac{\ln x}{(x^3+1)^2} + \frac{\ln x}{6} + \frac{1}{18}\left(\frac{1}{1+x^3} - \ln(1+x^3)\right)$$

2). $$I = \int \frac{x\,dx}{x^3 - 3x + 2} =$$

on écrit le polynôme x^3-3x+2 sous forme factorisée ; une de ses racines est $x = 1 \Longrightarrow x^3-3x+2 = (x-1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$

En divisant on trouve $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -2$

D'autre part $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$, donc

$x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$

$$= \int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+2)} = \int \left(\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}\right)dx.$$

Calculons les coefficients A, B, C :

$$\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} =$$

$$= \frac{(B+C)x^2 + (A+B-2C)x + (2A-2B+C)}{(x-1)^2(x+2)}$$

Comme cette expression doit être égale à $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$, on obtient un système de 3 équations pour 3 inconnus:

$$\begin{cases} B + C = 0 & \Longrightarrow \quad C = -B \\ A + B - 2C = 1 & \qquad \Downarrow \\ 2A - 2B + C = 0 & \Longrightarrow \quad A = \frac{3}{2}B \end{cases}$$

puis en substituant ces expressions dans la 2ème équation, on a

$$\frac{3}{2}B + B + 2B = 1$$

$$\Downarrow$$

$$B = \frac{2}{9} = -C$$

$$A = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

Donc :

$$I = \int \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{9}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{9}\frac{1}{x+2} \right\} dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{2}{9}\ln(x-1) - \frac{2}{9}\ln(x+2) =$$

$$= -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9}\ln\frac{x-1}{x+2}.$$

3). $$I = \int \frac{dx}{\cos x + \cos 3x} = \int \frac{dx}{\cos(2x-x) + \cos(2x+x)} =$$

$$= \int \frac{dx}{\underbrace{\cos 2x \cos x + \cancel{\sin 2x \sin x}}_{\cos x} + \underbrace{\cos 2x \cos x - \cancel{\sin 2x \sin x}}_{\cos 3x}} =$$

$$= \int \frac{dx}{2\cos x \cos 2x} = \int \frac{\cos x \, dx}{2\cos^2 x \cos 2x} =$$

$$= \int \frac{\cos x \, dx}{2\underbrace{(1-\sin^2 x)}_{\cos^2 x}\underbrace{(1-2\sin^2 x)}_{\cos 2x}} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{2(1-t^2)(1-2t^2)} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(t^2-1)(t^2-1/2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{t^2-1/2} \right) dt = \frac{1}{2}\int \left\{ \frac{1}{(t-1)(t+1)} - \frac{1}{(t-1/\sqrt{2})(t+1/\sqrt{2})} \right.$$

$$= \frac{1}{2}\int \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t-1/\sqrt{2}} - \frac{1}{t+1/\sqrt{2}}\right)\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln(t-1) - \ln(t+1)\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln(t-1/\sqrt{2}) - \ln(t+1/\sqrt{2})\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{t-1}{t+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t-1/\sqrt{2}}{t+1/\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{\sin x-1}{\sin x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sin x - 1/\sqrt{2}}{\sin x + 1/\sqrt{2}}.$$

4). $I = \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

Considérons d'abord l'équation $z^2+z+1=0$.

$\Delta = 1-4 = (i\sqrt{3})^2 \Longrightarrow z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\cos\frac{2\pi}{3}} + i\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\frac{2\pi}{3}} = e^{2\pi i/3}$

$z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \overset{\cos\frac{2\pi}{3}}{-\frac{1}{2}} - i\overset{\sin\frac{2\pi}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{-2\pi i/3}$

Par conséquent $x^4+x^2+1 = (x^2-e^{2\pi i/3})(x^2-e^{-2\pi i/3})$
et donc :

$$\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{(x^2-e^{2\pi i/3})(x^2-e^{-2\pi i/3})} = \frac{1}{e^{2\pi i/3}-e^{-2\pi i/3}}\left\{\frac{1}{x^2-e^{2\pi i/3}} - \frac{1}{x^2-e^{-2\pi i/3}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2i\sin 2\pi/3}\left\{\frac{1}{(x-e^{\pi i/3})(x+e^{\pi i/3})} - \frac{1}{(x-e^{-\pi i/3})(x+e^{-\pi i/3})}\right\}$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{2e^{\pi i/3}}\left[\frac{1}{x-e^{\pi i/3}} - \frac{1}{x+e^{\pi i/3}}\right] - \frac{1}{2e^{-\pi i/3}}\left[\frac{1}{x-e^{-\pi i/3}} - \frac{1}{x+e^{-\pi i/3}}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{3}}e^{-\pi i/3}\left[\frac{1}{x-e^{\pi i/3}} - \frac{1}{x+e^{\pi i/3}}\right] - \frac{1}{2i\sqrt{3}}e^{\pi i/3}\left[\frac{1}{x-e^{-\pi i/3}} - \frac{1}{x+e^{-\pi i/3}}\right]$$

Cette expression peut être integrée facilement et on obtient

$$I = \frac{e^{-\pi i/3}}{2i\sqrt{3}}\left[\ln(x-e^{\pi i/3}) - \ln(x+e^{\pi i/3})\right] -$$

$$- \frac{e^{\pi i/3}}{2i\sqrt{3}}\left[\ln(x-e^{-\pi i/3}) - \ln(x+e^{-\pi i/3})\right] =$$

Afin de simplifier cette expression, on utilise que

$$\ln(a+ib) = \ln\left\{\sqrt{a^2+b^2}\, e^{i \operatorname{arctg} \frac{b}{a}}\right\} = \ln\sqrt{a^2+b^2} + i \operatorname{arctg}\frac{b}{a} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(a^2+b^2) + i \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

En particulier:

$$\ln(x - e^{\pi i/3}) = \ln(x - \underbrace{\cos\pi/3}_{1/2} - i\underbrace{\sin\pi/3}_{\sqrt{3}/2}) =$$

$$= \ln\left(\left[x-\tfrac{1}{2}\right] - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) - i\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - i\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x-1}$$

$$\ln(x + e^{\pi i/3}) = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + i\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x+1}$$

$$\ln(x - e^{-\pi i/3}) = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + i\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x-1}$$

$$\ln(x + e^{-\pi i/3}) = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - i\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x+1}$$

Ceci permet d'obtenir:

$$I = \frac{1}{2i\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} - i\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x-1} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x+1}\right)\right)\right.$$

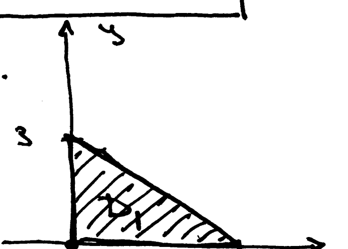
$$\left. - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + i\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x-1} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x+1}\right)\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{3}}\left\{-i\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} - i\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x-1} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x+1}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x-1} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x+1}\right).$$

Exercice 2

a).



Notons S l'aire du triangle. Calcul naïf donne $S = 3\cdot 4/2 = 6$. Nous allons maintenant reobtenir ce résultat à l'aide de l'intégration double.

Soit $y = ax+b$ l'équation de la droite passant par les points $(0,3)$ et $(4,0)$. On a alors deux équations:

$$\begin{cases} a\cdot 0 + b = 3 & \Rightarrow b = 3 \\ a \cdot 4 + b = 0 & \Rightarrow a \overset{\Downarrow}{=} -\frac{b}{4} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

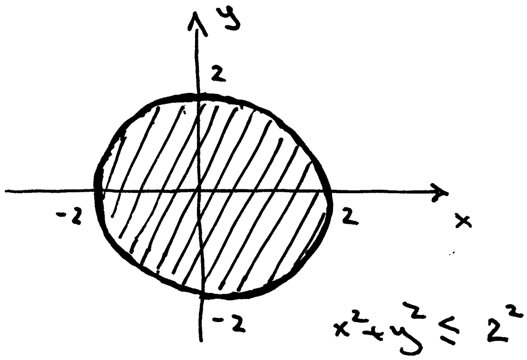
Donc l'équation de la droite est : $y = -\frac{3}{4}x + 3$.

En utilisant cette équation, on transforme l'intégrale double dans la définition de S en une intégrale itérée :

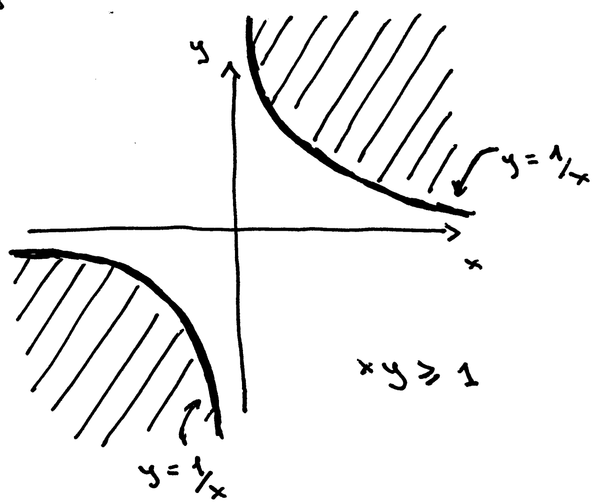
$$S = \iint_{D_1} dx\,dy = \int_0^4 dx \int_0^{-\frac{3}{4}x+3} dy = \int_0^4 dx \left(3 - \frac{3}{4}x\right) =$$

$$= \left(3x - \frac{3}{4}\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=4} = 3(4-0) - \frac{3}{8}(16-0) = 12 - 6 = 6.$$

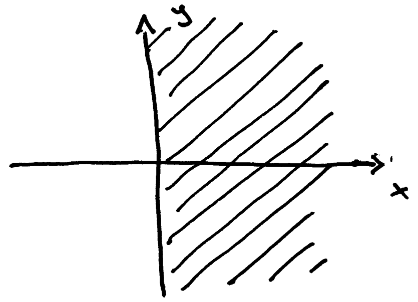
b).



$x^2+y^2 \leq 2^2$

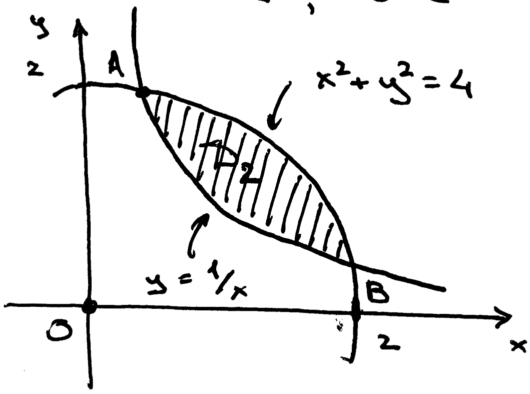


$xy \geq 1$



$x \geq 0$

Le domaine D_2 est formé par l'intersection de ces 3 domaines, donc



Calculons l'aire de D_2, notée S, par 2 méthodes :

I| en coordonnées polaires

II| en coordonnées cartésiennes

I| <u>Coordonnées polaires</u>

$x^2+y^2 = 4$ s'écrit comme $r = 2$

$xy = 1$ s'écrit comme $\underbrace{r\sin\varphi}_{y} \cdot \underbrace{r\cos\varphi}_{x} = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}$

D_2 est donc le domaine entre les courbes

$$r = 2 \quad \text{et} \quad r^2 = (\sin\varphi \cos\varphi)^{-1}$$

Calculons la coordonnée φ des points A et B (coordonnée r est déjà connue, $r = 2$). Elles s'obtiennent à partir de la solution de

$$(\sin\varphi \cos\varphi)^{-1} = 2^2 = 4 \Rightarrow \frac{2}{\underbrace{\sin 2\varphi}_{\substack{\parallel \\ 2\sin\varphi\cos\varphi}}} = 4 \Rightarrow \sin 2\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$2\varphi = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi = \frac{\pi}{12} \text{ ou } \frac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}$$

On voit donc que $\varphi(A) = \frac{5\pi}{12}$, $\varphi(B) = \frac{\pi}{12}$, et alors on peut écrire l'intégrale double $\iint_{D_2} dx\,dy = \iint_{D_2} r\,dr\,d\varphi$ comme une intégrale itérée:

$$S = \iint_{D_2} dx\,dy = \iint_{D_2} r\,dr\,d\varphi = \int_{\pi/12}^{5\pi/12} d\varphi \int_{1/\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}^{2} r\,dr =$$

$$= \int_{\pi/12}^{5\pi/12} d\varphi \left. \frac{r^2}{2} \right|_{r = \frac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}}^{r=2} =$$

$$= \int_{\pi/12}^{5\pi/12} d\varphi \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} \right) =$$

$$= 2\varphi \Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} - \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\pi/12}^{5\pi/12} \frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}}_{\text{notons } I_0}$$

$$I_0 = \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow dt = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \\ \frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{\cos^2\varphi\, dt}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{dt}{t} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\operatorname{tg}\pi/12}^{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_{\operatorname{tg}\pi/12}^{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}} = \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}.$$

Finalement on obtient

$$S = 2\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) - \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}.$$

II] Coordonnées cartesiennes

Calculons d'abord les coordonnées x, y des points A et B. On a

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=4 \Rightarrow x^4-4x^2+1=0$$

$$D = 16-4 = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$x^2 = \frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}\pm 1)^2}{2}$$

$$\Downarrow$$

4 solutions :

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$$x_3 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad x_4 = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

ne vérifient pas $x>0$

Donc (comme $x_1 > x_2$) :

$$\begin{cases} x(A) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \\ y(A) = \frac{1}{x(A)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}, \\ x(B) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}, \\ y(B) = \frac{1}{x(B)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}. \end{cases}$$

Maintenant on peut écrire l'intégrale double $\iint_{D_2} dx\,dy = S$ comme une intégrale itérée :

$$S = \iint_{D_2} dx\,dy = \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}} dx \int_{1/x}^{\sqrt{4-x^2}} dy = \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} dx \left(\sqrt{4-x^2}-\frac{1}{x}\right)$$

Calculons d'abord

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\,dt \\ \sqrt{4-x^2} = 2\cos t, \quad \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\cos^2 t\,dt \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \underbrace{2\cos^2 t}_{\cos 2t+1}\,dt = 2\int (\cos 2t+1)\,dt = 2\left(\frac{\sin 2t}{2}+t\right) = \sin 2t + 2t =$$

$$= 2\sin t\cos t + 2t = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{2\sin t}_{x}\cdot\underbrace{2\cos t}_{\sqrt{4-x^2}} + 2\underbrace{t}_{\arcsin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\arcsin\frac{x}{2}.$$

Par conséquent :

$$S = \left(\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\arcsin\frac{x}{2} - \ln x\right)\Bigg|_{x=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\sqrt{4-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\sqrt{4-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$+ 2\arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - 2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} - \ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

Notons que

$$\sqrt{4-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{4-\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

et, de façon analogue:

$$\sqrt{4-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

Donc:

$$S = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} +$$

$$+ 2\arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - 2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} - \ln\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} =$$

$$= 2\arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - 2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} - \ln(2+\sqrt{3}).$$

Enfin nous allons simplifier les expressions $\arcsin\frac{\sqrt{3}\pm 1}{2\sqrt{2}}$.
Si l'on pose

$$\sin t = \frac{\sqrt{3}\pm 1}{2\sqrt{2}} \Longrightarrow \cos 2t = 1-2\sin^2 t = 1-2\,\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{8} = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$2t = \frac{5\pi}{6}$ et $t = \frac{5\pi}{12}$ pour le signe "−"

$2t = \frac{\pi}{6}$ et $t = \frac{\pi}{12}$ pour le signe "+".

C'est-à-dire :

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{5\pi}{12}, \qquad \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{12}.$$

Finalement on obtient l'expression suivante pour l'aire de D_2:

$$S = 2\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) - \ln(2+\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3} - \ln(2+\sqrt{3}).$$

<u>Remarque</u>: Il est facile de vérifier que ce résultat coïncide avec la formule obtenue en coordonnées polaires. Effectivement,

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \Longrightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \Longrightarrow \cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

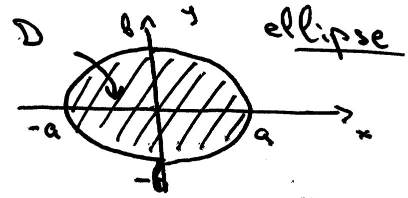
$$\frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)^2} = \ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} =$$

$$= \ln\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \ln\frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \ln(2+\sqrt{3}),$$

et donc les expressions en coordonnées cartésiennes et polaires coïncident. La Science est toute-puissante !

Exercice 3

1). $$I = \iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy$$



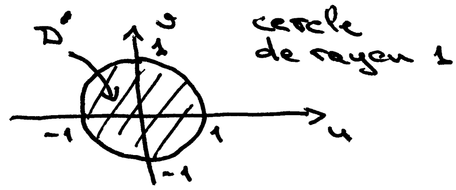
$$D = \left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

a). Après le changement de variables

$x = au$, $y = bv$, $dx\,dy \to ab\, du\, dv$

on obtient

$$I = ab\iint_{D'} (1 - u^2 - v^2)\, du\, dv$$



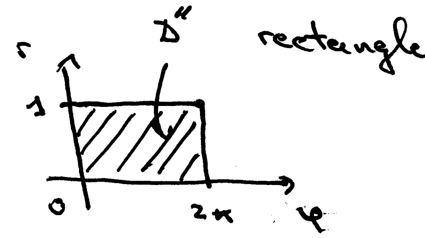
$$D' = \{(u,v) \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$$

b). Après le changement de variables "cartésiennes → polaires"

$u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$, $du\, dv \to r\, dr\, d\varphi$

$u^2 + v^2 = 1$

on obtient



$$I = ab\iint_{D''} (1 - r^2)\, r\, dr\, d\varphi$$

$$D'' = \{(r,\varphi) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

On peut donc réécrire notre intégrale double comme une intégrale itérée :

$$I = ab\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, (1 - r^2)\, r = 2\pi ab \int_0^1 (r - r^3)\, dr =$$

$$= 2\pi ab \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_{r=0}^{1} = 2\pi ab\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi ab}{2}.$$

2). $$I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 2ax,\ x^2 + y^2 \leq 2ay\}$$

D'abord essayons de comprendre mieux la géométrie de D.

$x^2+y^2 \leq 2ax$

$\Updownarrow$

$x^2-2ax+y^2 \leq 0$

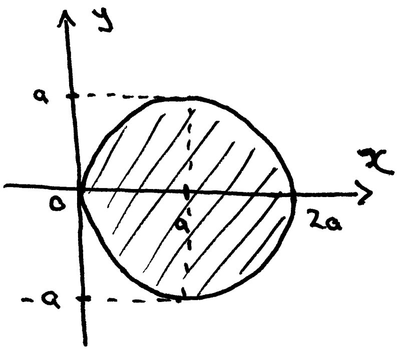
$\Updownarrow$

$x^2-2ax+y^2+a^2 \leq a^2$

$\Updownarrow$

$(x-a)^2+y^2 \leq a^2$

ce domaine décrit l'intérieur du cercle de centre $(a,0)$ et de rayon a



$x^2+y^2 \leq 2ay$

$\Updownarrow$

$x^2+y^2-2ay \leq 0$

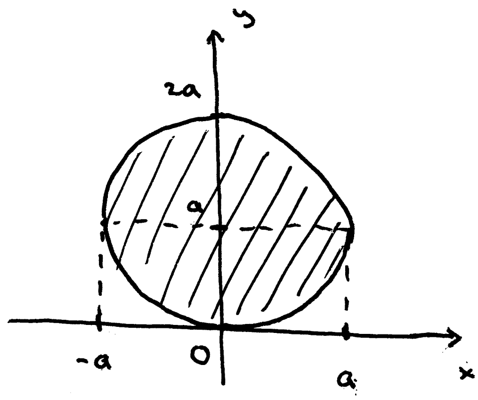
$\Updownarrow$

$x^2+y^2-2ay+a^2 \leq a^2$

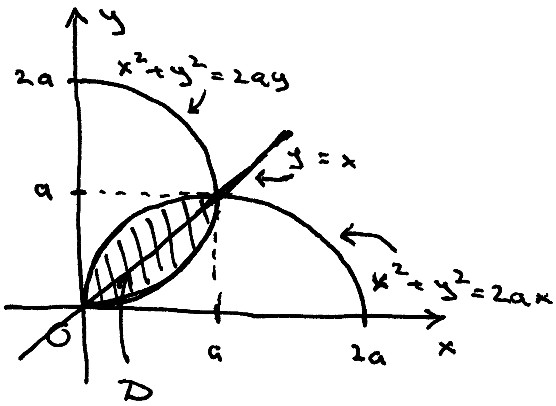
$\Updownarrow$

$x^2+(y-a)^2 \leq a^2$

cercle de rayon a et de centre $(0,a)$



L'intersection des deux domaines:



Réécrivons maintenant les équations $x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2=2ay$ en coordonnées polaires: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy \to r dr d\varphi$

$x^2+y^2 = 2ax \iff r^2 = 2ar\cos\varphi \implies r = 2a\cos\varphi$

$x^2+y^2 = 2ay \iff r^2 = 2ar\sin\varphi \implies r = 2a\sin\varphi$

Conséquence:

- la partie de D située <u>au-dessus</u> de la droite $y=x$, peut être décrit par <u>les inégalités</u>
  $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq r \leq 2a\cos\varphi$
- de même, la partie de D <u>au-dessous</u> de $y=x$ est donnée par $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $0 \leq r \leq 2a\sin\varphi$

Donc notre intégrale double se transforme en une intégrale itérée (somme de 2 intégrales itérées):

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_D r^2 \cdot r\,dr\,d\varphi = \iint_D r^3\,dr\,d\varphi =$$

$$= \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^3\,dr}_{\substack{\text{contribution de} \\ \text{la partie de } D \\ \text{au-dessus de } y=x}} + \underbrace{\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2a\sin\varphi} r^3\,dr}_{\substack{\text{contribution de} \\ \text{la partie de } D \\ \text{au-dessous de } y=x}} =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{2a\cos\varphi} + \int_0^{\pi/4} d\varphi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{2a\sin\varphi} =$$

$$= 4a^4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi + 4a^4 \int_0^{\pi/4} \sin^4\varphi\,d\varphi$$

Dans la 2ème intégrale, on fait un changement de variables:

$$\int_0^{\pi/4} \sin^4\varphi\,d\varphi = \left| \begin{matrix} \varphi = \frac{\pi}{2} - s, & s = \frac{\pi}{2} - \varphi \\ d\varphi = -ds & \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi/4} (-ds) \cdot \sin^4\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 s\,ds$$

Donc on peut écrire

$$I = 8a^4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = 2a^4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \big(\underbrace{2\cos^2\varphi}_{\cos 2\varphi + 1}\big)^2 d\varphi =$$

$$= 2a^4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 2\varphi + 1)^2\,d\varphi = 2a^4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \big(\underbrace{\cos^2 2\varphi}_{\frac{\cos 4\varphi + 1}{2}} + 2\cos 2\varphi + 1\big)\,d\varphi =$$

$$= a^4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3)\,d\varphi =$$

$$= a^4 \left(\frac{\sin 4\varphi}{4} + 4\,\frac{\sin 2\varphi}{2} + 3\varphi\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = a^4\left(-2 + \frac{3\pi}{4}\right)$$

3). $I = \iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$

$D = \{(x,y) \mid |x| \leq x^2+y^2 \leq 1\}$

Commençons par l'étude du domaine D.

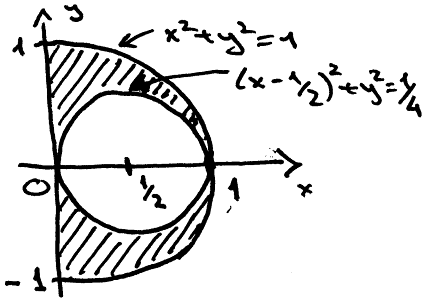
- soit $x \geq 0$, dans ce cas on a 2 inégalités :

  $x^2+y^2 \leq 1$ $\Rightarrow$ ceci décrit l'intérieur du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1

  $x^2+y^2 \geq x \Rightarrow x^2-x+y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2-x+\frac{1}{4}+y^2 \geq \frac{1}{4}$

  $\Updownarrow$

  $(x-\frac{1}{2})^2+y^2 \geq (\frac{1}{2})^2$



  ceci décrit l'extérieur du cercle de centre $(\frac{1}{2},0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

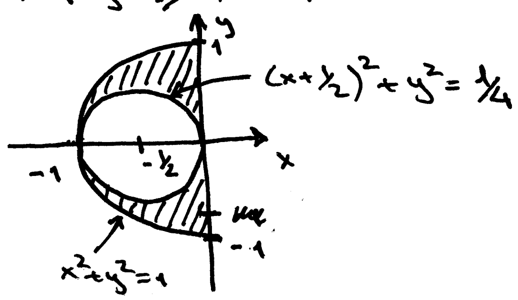
- de façon analogue, si $x \leq 0$, on a 2 inégalités :

  $x^2+y^2 \leq 1 \Rightarrow$ l'intérieur du cercle unitaire de centre $(0,0)$

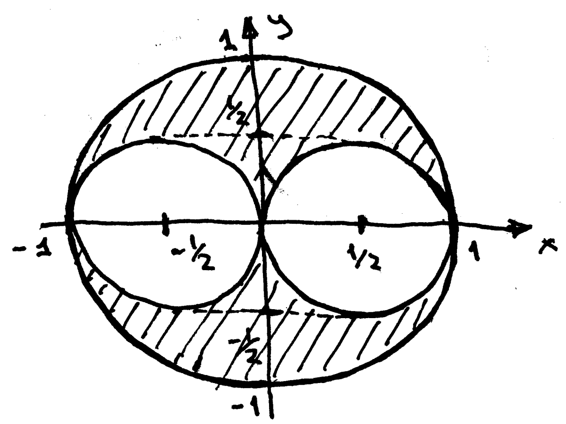
  $x^2+y^2 \geq -x \Rightarrow x^2+x+\frac{1}{4}+y^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2+y^2 \geq (\frac{1}{2})^2$

  $\uparrow$

  l'extérieur du cercle de centre $(-\frac{1}{2},0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$



Donc notre domaine d'intégration a la forme suivante :



Si l'on introduit les notations

$D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ $\leftarrow$ intérieur du cercle unitaire de centre $(0,0)$

$D_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq x\}$ $\leftarrow$ intérieur du cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et de centre $(\frac{1}{2},0)$

$D_3 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq -x\}$ $\leftarrow$ intérieur du cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et de centre $(-\frac{1}{2},0)$

alors on peut réécrire notre intégrale comme

$$I = \iint_D = \underbrace{\iint_{D_1}}_{I_1} - \underbrace{\iint_{D_2}}_{I_2} - \underbrace{\iint_{D_3}}_{I_3}$$

Calculons ces 3 intégrales séparément :

I) $$I_1 = \iint_{D_1} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} =$$

| en coordonnées polaires
| $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dx\,dy \to r\,dr\,d\varphi$
| $x^2+y^2=1$
| et le domaine est donné par
| le rectangle $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

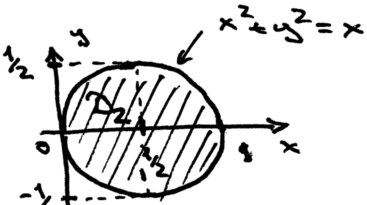
Notre intégrale double s'écrit donc comme une intégrale itérée :

$$I_1 = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{r}{(1+r^2)^2} = 2\pi \int_0^1 \frac{r\,dr}{(1+r^2)^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = r^2+1 \\ dt = 2r\,dr \end{array} \right| = \pi \int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \pi \left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_{t=1}^{t=2} =$$

$$= \pi\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{\pi}{2}$$

II) $$I_2 = \iint_{D_2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$



En coordonnées polaires, l'équation $x^2+y^2=x$ devient

$$r^2 = r\cos\varphi \Rightarrow r = \cos\varphi$$

et le domaine

$$D_2 \longrightarrow D_2' = \{(r,\varphi) \mid \varphi \in [-\pi/2, \pi/2],\ r \in [0, \cos\varphi]\}$$

Alors I_2 se transforme en une intégrale itérée :

$$I_2 = \iint_{D_2'} \frac{r\,dr\,d\varphi}{(1+r^2)^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \frac{r\,dr}{(1+r^2)^2} =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \ \frac{1}{2} \int_0^{\cos\varphi} \frac{d(1+r^2)}{(1+r^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \left(-\frac{1}{1+r^2}\right)\Big|_{r=0}^{r=\cos\varphi} = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \left(-\frac{1}{1+\cos^2\varphi} + 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\underbrace{2\cos^2\varphi}_{\cos 2\varphi + 1} + 2} = \frac{\pi}{2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi + 3}$$

Calculons séparément l'intégrale

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + 1} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\varphi = t \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2\varphi} d\varphi = (t^2+1)\,d\varphi \\ d\varphi = \frac{dt}{t^2+1} \; ; \text{ comme } 1+t^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi} \Rightarrow \cos^2\varphi = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{1+t^2}+1} = \int \frac{dt}{t^2+2} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{2}\, s \\ dt = \sqrt{2}\, ds \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\sqrt{2}\, ds}{2(s^2+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} s = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{2}}$$

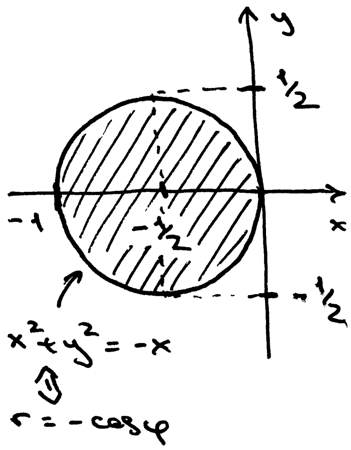
et donc

$$I_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + 1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{2}} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty) \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

III] De façon analogue à la précédente:



$$I_3 = \iint_{D_3} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

En coordonnées polaires:

$$x^2+y^2 = -x \Longrightarrow r = -\cos\varphi$$

$$D_3 \to D_3' = \left\{ (r,\varphi) \,\middle|\, \begin{array}{l} \varphi \in [\pi/2, 3\pi/2] \\ r \in [0, -\cos\varphi] \end{array} \right\}$$

et donc

$$I_3 = \iint_{D_3'} \frac{r\,dr\,d\varphi}{(1+r^2)^2} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^{-\cos\varphi} \frac{r\,dr}{(1+r^2)^2} = \left| \begin{array}{l} \text{même calcul} \\ \text{que pour } I_2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1+\cos^2\varphi} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{comme on intègre} \\ \text{une fonction péri-} \\ \text{odique (de période } \pi) \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\pi/2+\alpha}^{3\pi/2+\alpha} d\varphi \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1+\cos^2\varphi} \right),$$

où α est un nombre réel quelconque. En choisissant $\alpha = -\pi$, on trouve

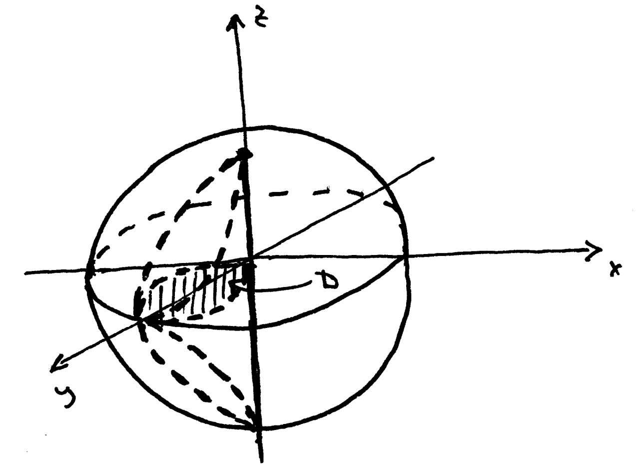
$$I_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1+\cos^2\varphi} \right) = I_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Enfin, en combinant les résultats pour I_1, I_2, I_3, on obtient

$$I = I_1 - I_2 - I_3 = \frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}.$$

TD 2

Exercice 1

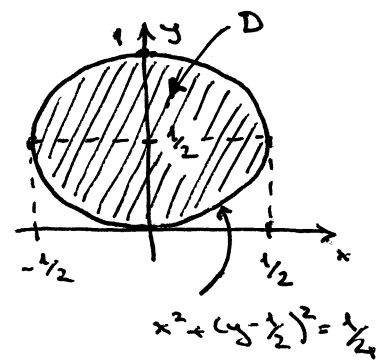


- l'équation de la partie haute de la sphère est
$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$$
- l'équation de la partie basse
$$z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$$
- on note D l'intérieur du cercle $x^2+(y-\tfrac{1}{2})^2 = (\tfrac{1}{2})^2$ dans le plan xy (de centre $(0,\tfrac{1}{2})$ et de rayon $\tfrac{1}{2}$)

On peut partiellement transformer l'intégrale triple $V = \iiint_V dx\,dy\,dz$ en une intégrale itérée :

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz =$$

$$= 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$



Pour calculer cette intégrale double, passons en coordonnées polaires :

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad dx\,dy \to r\,dr\,d\varphi$$

L'équation $x^2+(y-\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}$ en coordonnées polaires s'écrit comme

$$x^2+(y-\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4} \iff x^2+y^2 = y \iff r^2 = r\sin\varphi \iff r = \sin\varphi$$

et donc le domaine d'intégration devient

$$D \to D' = \{(r,\varphi) \mid \varphi \in [0,\pi],\ r \in [0,\sin\varphi]\}.$$

Maintenant l'intégrale double s'écrit comme une intégrale itérée :

$$V = 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = 2\int_0^\pi d\varphi \int_0^{\sin\varphi} r\sqrt{1-r^2}\,dr =$$

$$= -\int_0^\pi d\varphi \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{1-r^2}\,d(1-r^2) = -\int_0^\pi d\varphi\ \frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sin\varphi} =$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^\pi d\varphi\,\{(\underbrace{1-\sin^2\varphi}_{\cos^2\varphi})^{3/2} - 1\} = \frac{2}{3}\int_0^\pi d\varphi\,(1-|\cos\varphi|^3)$$

On intègre une fonction de période π sur la période, donc

$$V = \frac{2}{3}\int_\alpha^{\pi+\alpha} d\varphi\,(1-|\cos\varphi|^3) = \left|\begin{array}{c}\text{en choisissant}\\ \alpha = -\pi/2\end{array}\right| =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\,(1-|\cos\varphi|^3) = \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi\,(1-\cos^3\varphi) =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\, d\varphi = \left|\begin{matrix}\sin\varphi = t\\ dt = \cos\varphi\, d\varphi\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\underbrace{(1-\sin^2\varphi)}_{\cos^2\varphi}\,\underbrace{d(\sin\varphi)}_{\cos\varphi\, d\varphi} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{3}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}.$$

Exercice 2

1). $I = \iiint_V z\,dx\,dy\,dz$

$$V = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1/2,\ x \le y \le 2x,\ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

Notre première tache – comprendre la géométrie de V :

- le domaine défini par $0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$ est la partie supérieure de la boule $x^2+y^2+z^2 \le 1$
- l'intersection de cette boule avec le plan xy est donnée par l'intérieur du cercle $x^2+y^2=1$.
- le domaine défini par $0 \le x \le 1/2$, $x \le y \le 2x$ dans le plan xy, a la forme suivante (Fig. 1)

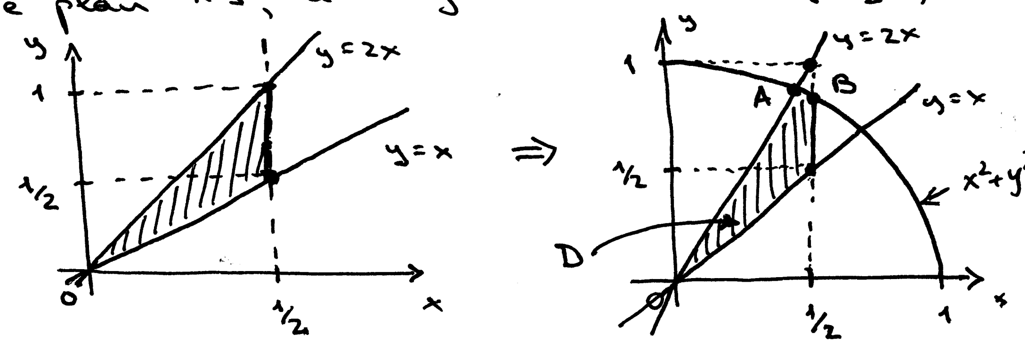


Fig. 1 Fig. 2

Sur la Fig. 2, on représente l'intersection du domaine $0 \le x \le 1/2$, $x \le y \le 2x$ avec le domaine $x^2+y^2 \le 1$. Ces 2 domaines sont bidimensionnelles

- le domaine tridimensionnel V qu'on veut décrire est constitué de tous les points de la demi-boule supérieure $0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$ situés au-dessus du domaine D (voir Fig. 3).

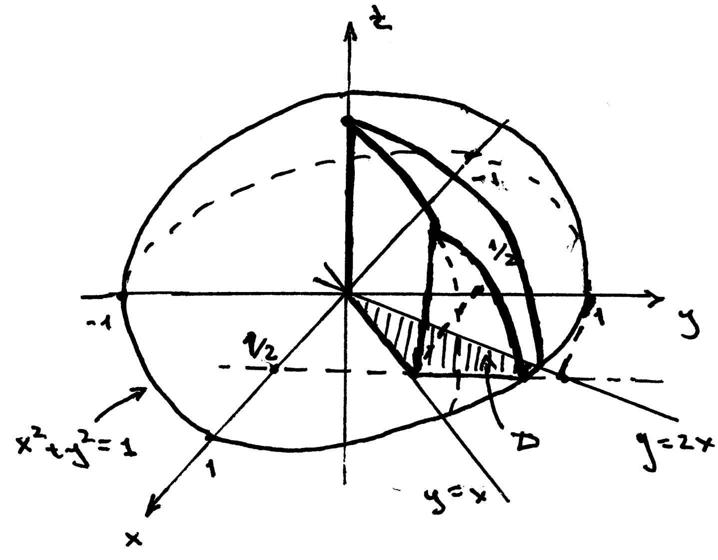


Fig. 3

Maintenant on peut partiellement transformer l'intégrale triple I en une intégrale itérée:

$$I = \iiint_V z\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_D dx\,dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz =$$

$$= \iint_D dx\,dy \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D (1-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

Pour calculer l'intégrale double restante, il sera utile de trouver les coordonnées des points A et B (voir Fig. 2):

point B : $x(B) = 1/2 \Rightarrow$ comme $x^2(B) + y^2(B) = 1 \Rightarrow$

$$y^2(B) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$y(B) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

parmi ces 2 solutions on doit choisir $y(B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ car $y(B) > 0$.

coordonnées polaires:

$r_B = 1$

$\cos\varphi_B = \frac{x_B}{r_B} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_B = \frac{\pi}{3}$

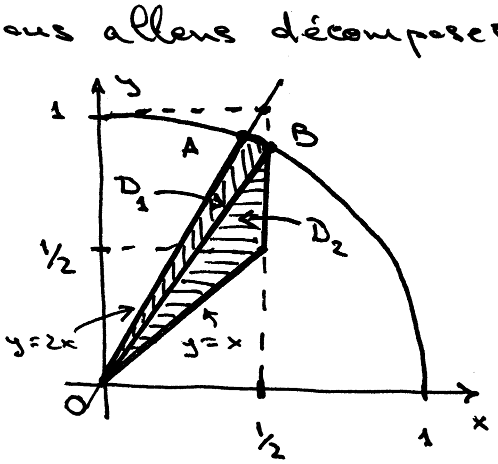
point A : $\operatorname{tg}\varphi_A = \frac{1}{1/2} = 2$

$$\Downarrow$$

$\varphi_A = \operatorname{arctg} 2$

$r_A = 1$ comme $A \in$ au cercle $x^2+y^2=1$

Nous allons décomposer D en 2 parties:



$$I = \frac{1}{2}\iint_D = \frac{1}{2}\Big\{\underbrace{\iint_{D_1}}_{I_1} + \underbrace{\iint_{D_2}}_{I_2}\Big\}$$

Calculons ces 2 intégrales séparément.

I| Le domaine D_1 en coordonnées polaire se transforme en un rectangle :

$$D_1 \longrightarrow D_1' = \{(r,\varphi) \mid r \in [0,1],\ \varphi \in [\underset{\pi/3}{\underset{\shortparallel}{\varphi_B}}, \underset{\operatorname{arctg} 2}{\underset{\shortparallel}{\varphi_A}}]\}$$

et donc I_1 s'écrit comme une intégrale itérée :

$$I_1 = \iint_{D_1} (1-x^2-y^2)\,dx\,dy = \iint_{D_1'} (1-r^2)\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/3}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr = (\operatorname{arctg} 2 - \pi/3)\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_{r=0}^{r=1} =$$

$$= \frac{1}{4}(\operatorname{arctg} 2 - \pi/3)$$

II| Pour calculer I_2, il est plus commode de rester en coordonnées cartésiennes et trouver l'équation de la droite qui passe par l'origine et le point B. Elle a la forme $y = \alpha x$. Comme $x(B) = \frac{1}{2}$, $y(B) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \sqrt{3}$.

Maintenant I_2 s'écrit comme une intégrale itérée :

$$I_2 = \iint_{D_2} (1-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_0^{1/2} dx \int_x^{\sqrt{3}x} (1-x^2-y^2)\,dy =$$

$$= \int_0^{1/2} dx \left\{ (1-x^2)\,y \Big|_{y=x}^{y=\sqrt{3}x} - \frac{y^3}{3}\Big|_{y=x}^{y=\sqrt{3}x} \right\} =$$

$$= \int_0^{1/2} dx \left\{ (\sqrt{3}-1)\,x\,(1-x^2) - \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right)x^3 \right\} =$$

$$= \int_0^{1/2} dx \left\{ (\sqrt{3}-1)\,x - \left(2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\right)x^3 \right\} =$$

$$= \left\{ (\sqrt{3}-1)\frac{x^2}{2} - \left(2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\right)\frac{x^4}{4} \right\}\Big|_{x=0}^{x=1/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{8} - \frac{6\sqrt{3}-4}{3 \cdot 64} = \frac{\sqrt{3}-1}{8} - \frac{3\sqrt{3}-2}{96} = \frac{9\sqrt{3}-10}{96}$$

Donc :

$$I = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2 = \frac{1}{8}(\operatorname{arctg} 2 - \pi/3) + \frac{9\sqrt{3}-10}{192}.$$

2). $I = \iiint_V x^2 \, dx\,dy\,dz$

$V = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \}$ l'intérieur de la spère de rayon R centrée en (0,0,0)

En coordonnées sphériques:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \sin\theta \\ y = r\sin\varphi \sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad V \to V' = \left\{ (r,\theta,\varphi) \,\middle|\, \begin{array}{l} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

$dx\,dy\,dz \to r^2 \sin\theta \, dr\,d\theta\,d\varphi$

(transformation de l'élément infinitesimal de volume)

Donc I se réécrit facilement comme une intégrale itérée:

$$I = \iiint_V x^2 dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} \underbrace{(r\cos\varphi\sin\theta)^2}_{x^2} \cdot \underbrace{r^2 \sin\theta \, dr\,d\theta\,d\varphi}_{\text{remplace } dxdydz}$$

$$= \underbrace{\int_0^R r^4 dr}_{R^5/5} \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{R^5}{5} \cdot \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi .$$

Calculons séparément les intégrales ordinaires par rapport à θ et φ

$$\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = \left| \begin{array}{l} \cos\theta = t, \quad -\sin\theta \, d\theta = dt \\ \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-t^2 \end{array} \right| = -\int_1^{-1} (1-t^2)dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-t^2)dt = \left(t - t^3/3 \right) \Big|_{t=-1}^{t=1} = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+\cos 2\varphi) \, d\varphi =$$

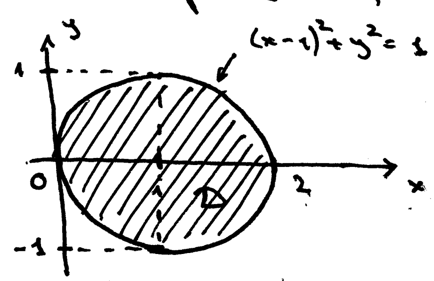
$$= \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \pi$$

Alors on obtient

$$I = \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi = \frac{4\pi}{15} R^5 .$$

3). $I = \iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy\,dz$

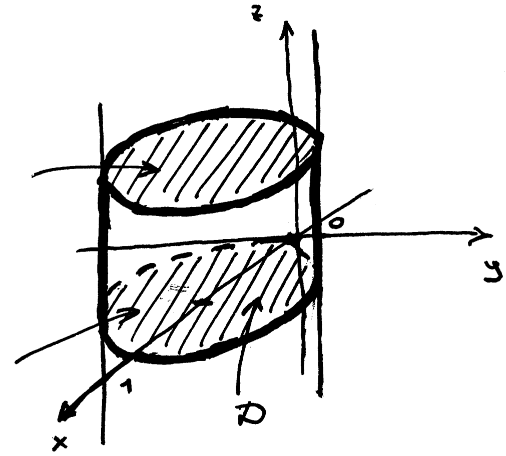
V limité par le cylindre $x^2+y^2 = 2x$ et les plans $z=0$, $z=a$.



Dans le plan xy, l'équation

$$x^2+y^2 = 2x \iff (x-1)^2+y^2 = 1$$

définit un cercle de rayon 1 et de centre $(1,0)$.



Donc V est un cylindre de hauteur a, représenté sur la figure, et I s'écrit comme une intégrale $\underbrace{\text{itérée}}_{\text{partiellement}}$:

$$I = \iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_D dx\,dy \int_0^a \sqrt{x^2+y^2}\, z\,dz =$$

$$= \frac{a^2}{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy$$

En coordonnées polaires: $x^2+y^2=2x \iff r = 2\cos\varphi$

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dx\,dy \to r\,dr\,d\varphi$

$D \to D' = \{(r,\varphi) \mid \varphi\in[-\pi/2, \pi/2],\ r\in[0, 2\cos\varphi]\}$

et donc $\iint_D$ s'écrit comme une intégrale itérée:

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy = \iint_{D'} r\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\ \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\varphi} =$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi\, d\varphi = \left| \begin{matrix} \sin\varphi = t, & \cos\varphi\, d\varphi = dt \\ \cos^2\varphi = 1-\sin^2\varphi = 1-t^2 \end{matrix} \right| =$$

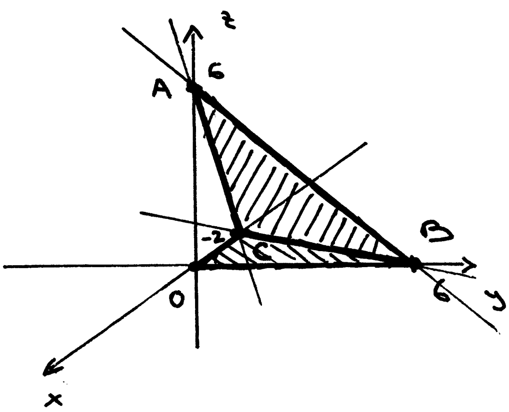
$$= \frac{8}{3}\int_{-1}^{1} (1-t^2)\,dt = \frac{8}{3}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{t=-1}^{t=1} = \frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{32}{9}$$

Donc:

$$I = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{32}{9} = \frac{16a^2}{9}.$$

Exercice 3 4 plans : $\underbrace{3x-y-z=-6}_{P_1}$, $\underbrace{x=0}_{P_2}$, $\underbrace{y=0}_{P_3}$, $\underbrace{z=0}_{P_4}$.

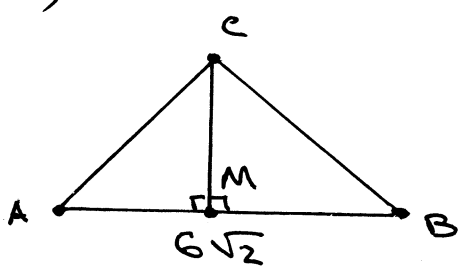
		passe par
• intersection de P_1 et P_2 :	la droite $y+z=6$ dans le plan yz	$A=(0,0,6)$ $B=(0,6,0)$
• intersection de P_1 et P_3 :	la droite $3x-z=-6$ dans le plan xz	$A=(0,0,6)$ $C=(-2,0,0)$
• intersection de P_1 et P_4 :	la droite $3x-y=-6$ dans le plan xy	$B=(0,6,0)$ $C=(-2,0,0)$



Il s'agit donc de calculer l'aire du triangle ABC

1ère méthode (géométrie élémentaire)

Calculons les longueurs des trois cotés du triangle :



$c = AB = |\vec{AB}| = |(0,6,-6)| =$
$= \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$

$b = AC = |\vec{AC}| = |(-2,0,-6)| =$
$= \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$

$a = BC = |\vec{BC}| = |(-2,-6,0)| =$
$= \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$

$\Rightarrow$ triangle isocèle

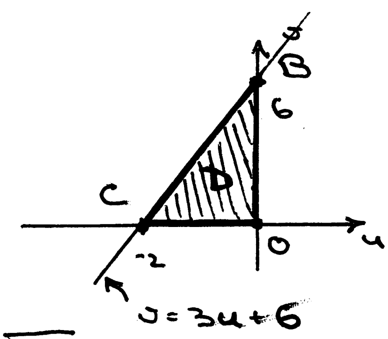
Alors $CM^2 = AC^2 - AM^2 = 40 - 18 = 22 \Rightarrow CM = \sqrt{22}$
et donc l'aire de $ABC = AB \cdot CM/_2 = 6\sqrt{2}\cdot\sqrt{22}/_2 = 6\sqrt{11}$.

2ème méthode (intégration double)

Paramétrisation de notre surface :

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 3u - v + 6 \end{cases}$$

$(u,v) \in D$, où D est le triangle OBC (dans le plan uv)



Donc :

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 3u - v + 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\vec{r}'_u}_{= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}'_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'_u \wedge \vec{r}'_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}'_u \wedge \vec{r}'_v| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

et enfin l'aire S de notre triangle est donnée par

$$S = \iint_D |\vec{r}'_u \wedge \vec{r}'_v| \, du\, dv = \iint_D \sqrt{11}\, du\, dv =$$

$$= \sqrt{11} \int_{-2}^{0} du \int_{0}^{3u+6} dv = \sqrt{11} \int_{-2}^{0} (3u+6)\, du =$$

$$= \sqrt{11} \left(\frac{3u^2}{2} + 6u \right) \Bigg|_{u=-2}^{u=0} = \sqrt{11} \left(-\frac{3 \cdot 4}{2} + 6 \cdot 2 \right) = 6\sqrt{11}.$$

Les deux résultats coïncident. Vive la Science !

Exercice 4

Paramétrisation de la sphère $x^2+y^2+z^2=1$:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \sin\theta \\ y = \sin\varphi \sin\theta \\ z = \cos\theta \\ \theta \in [0,\pi], \ \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\vec{r}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}'_\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{r}'_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'_\theta \wedge \vec{r}'_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin^2\theta \\ \sin\varphi \sin^2\theta \\ \cos^2\varphi \cos\theta \sin\theta + \sin^2\varphi \cos\theta \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin^2\theta \\ \sin\varphi \sin^2\theta \\ \cos\theta \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}'_\theta \wedge \vec{r}'_\varphi| = \sqrt{\underbrace{\cos^2\varphi \sin^4\theta + \sin^2\varphi \sin^4\theta}_{= \sin^4\theta} + \cos^2\theta \sin^2\theta} =$$

$$= \sqrt{\sin^4\theta + \sin^2\theta \cos^2\theta} = \sqrt{\sin^2\theta \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{= 1}} = \sin\theta$$

Par conséquent, l'élément d'aire de la sphère unitaire en coordonnées (θ, φ) est donné par

$$dS = |\vec{r}\,'_\theta \wedge \vec{r}\,'_\varphi| \, d\theta \, d\varphi = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

| formule à retenir absolument!

Maintenant calculons la masse:

$$M = \iint_{\substack{\text{sphère} \\ x^2+y^2+z^2=1}} \sigma \, dS = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \sin\theta \cdot \{ \underbrace{\cos^2\varphi \sin^2\theta}_{x^2} + \underbrace{\sin^2\varphi \sin^2\theta}_{y^2} \} =$$

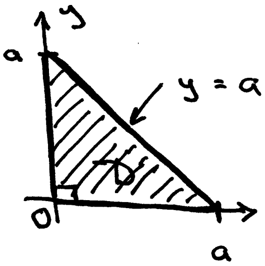
$$= \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = \left| \begin{array}{l} \cos\theta = t, \; dt = -\sin\theta d\theta \\ \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - t^2 \end{array} \right.$$

$$= 2\pi \int_1^{-1} \underbrace{(1-t^2)}_{\sin^2\theta} \underbrace{(-dt)}_{-\sin\theta d\theta} = 2\pi \int_{-1}^{1} (1-t^2) dt = 2\pi \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{1} = \frac{8\pi}{3}$$

TD 3

Exercice 1

1).



$$\vec{r}_c = \frac{\iint_D \vec{r}\, \sigma\, dx\,dy}{\iint_D \sigma\, dx\,dy} = \frac{\iint_D \vec{r}\, dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}$$

Ici $\sigma = \text{const}$ est la densité surfacique et $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le domaine D peut être décrit comme

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a-x\}$$

et donc toute intégrale $\iint_D$ s'écrit comme une intégrale itérée :

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} x\,dy = \int_0^a dx\ x(a-x) =$$

$$= \left(a\,x^2/2 - x^3/3\right)\Big|_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} y\,dy = \int_0^a dx\ \frac{y^2}{2}\Big|_0^{a-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a dx\ (a-x)^2 = \frac{1}{2}\int_0^a dx\ (a^2 - 2ax + x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2 x - a x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$

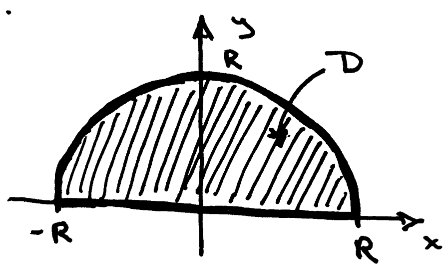
$$\iint_D dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy = \int_0^a dx\ (a-x) = \left(ax - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^a = \frac{a^2}{2}$$

Par conséquent, dans le système choisi de coordonnées, la position du centre d'inertie est donnée par

$$\vec{r}_c = \frac{1}{a^2/2}\begin{pmatrix} a^3/6 \\ a^3/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/3 \\ a/3 \end{pmatrix}$$

Remarque : on peut facilement vérifier que cette position correspond au point d'intersection des médianes.

2).



Position du centre d'inertie :

$$\vec{r}_c = \frac{\iint_D \vec{r}\, dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}$$

Pour calculer les intégrales $\iint_D$, il est pratique de passer en coordonnées polaires:

$$x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi\,,\quad dx\,dy \to r\,dr\,d\varphi$$

$$D \to D' = \{(r,\varphi) \mid r\in[0,R]\,,\ \varphi\in[0,\pi]\}$$

Alors:

$$\iint_D x\,dx\,dy \to \iint_{D'} r\cos\varphi \cdot r\,dr\,d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{r^3}{3}\Big|_0^R \cdot \underbrace{\sin\varphi\Big|_0^\pi}_{=0} = 0$$

$$\iint_D y\,dx\,dy = \iint_{D'} r\sin\varphi \cdot r\,dr\,d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \underbrace{\frac{r^3}{3}\Big|_0^R}_{=R^3/3} \cdot \underbrace{(-\cos\varphi)\Big|_0^\pi}_{=2} = \frac{2R^3}{3}$$

$$\iint_D dx\,dy = \iint_{D'} r\,dr\,d\varphi = \underbrace{\int_0^R r\,dr}_{=R^2/2}\ \underbrace{\int_0^\pi d\varphi}_{=\pi} = \frac{\pi R^2}{2}$$

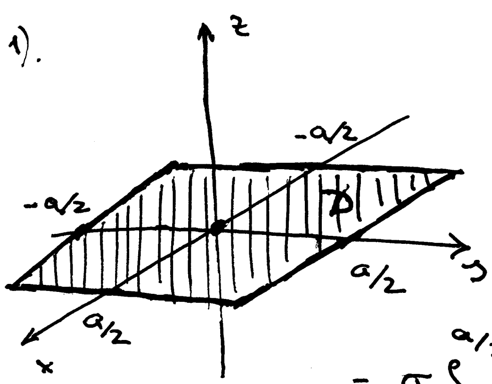
et la position du barycentre est donnée par

$$\vec{r}_C = \frac{1}{\pi R^2/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2R^3/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3\pi}R \end{pmatrix}$$

Le centre d'inertie se situe sur l'axe Oy, comme bien sûr on aurait pu l'attendre.

Exercice 2

1).



Oz - axe de rotation

$D = \{(x,y) \mid x\in[-a/2, a/2]\,, y\in[-a/2, a/2]\}$

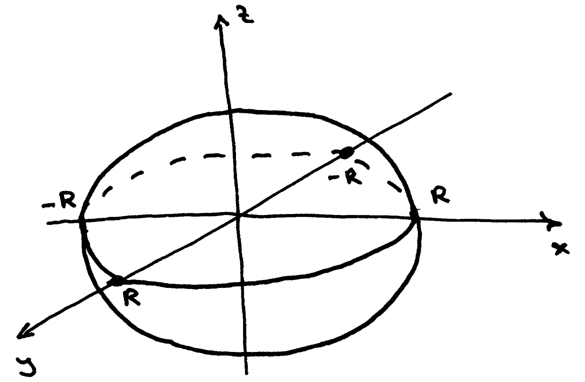
Notons $\sigma = \frac{m}{a^2}$ la densité surfacique. Alors

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,\sigma\,dx\,dy =$$

$$= \sigma\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy\,(x^2+y^2) = \sigma\int_{-a/2}^{a/2} dx\,\left(x^2 y + y^3/3\right)\Big|_{-a/2}^{a/2} =$$

$$= \sigma\int_{-a/2}^{a/2} dx\left(a x^2 + \frac{a^3}{12}\right) = \sigma\left(a\frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{12}x\right)\Big|_{-a/2}^{a/2} = \sigma\frac{a^4}{6} = \frac{ma^2}{6}.$$

2).



Oz - axe de rotation

$V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

Notons $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ la densité volumique. Alors

$$I = \iiint_V (x^2+y^2)\,\rho\, dx\,dy\,dz$$

En coordonnées sphériques:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad dx\,dy\,dz \to r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$V \to V' = \{(r,\theta,\varphi) \mid r\in[0,R],\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi]\}$$

et I est alors donné par

$$I = \rho\iiint_{V'} \{\underbrace{r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta}_{x^2} + \underbrace{r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}_{y^2}\}\, r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \iiint_{V'} \rho\, r^2\sin^2\theta \cdot r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \rho\underbrace{\int_0^R r^4\,dr}_{R^5/5} \int_0^\pi \sin^3\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \frac{2\pi\rho R^5}{5}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta$$

L'intégrale restante on a déjà calculé plusieurs fois (par exemple, à la fin de l'Exercice 4 du TD2). Le résultat: $\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3}$. Donc:

$$I = \frac{2\pi\rho R^5}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2\cancel{\pi} R^5}{5}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{M}{\cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi} R^3} = \frac{2}{5}MR^2.$$

Exercice 3 Si on place une charge q à la position $\vec{r}'$, le potentiel électrostatique créé en $\vec{r}$ est

$$\varphi_q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Pour une distribution volumique de charges:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(x',y',z')\,dx'dy'dz'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Dans notre cas:

- $\rho(x',y',z') = \rho$ = const
- $\vec{r} = 0$ (on calcule le potentiel à l'origine)
- $V = \{(x',y',z') \mid x'^2+y'^2+z'^2 \le 1\}$

Passons en coordonnées sphériques :

$$x' = r\cos\varphi \sin\theta, \quad y' = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z' = r\cos\theta, \quad |\vec{r}\,'| = r,$$

$$dx'dy'dz' \longrightarrow r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$V \longrightarrow V' = \{(r,\theta,\varphi) \mid r \in [0,R],\ \theta \in [0,\pi),\ \varphi \in [0,2\pi)\}$$

Alors le potentiel au centre est :

$$\varphi(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho \, dx'dy'dz'}{|\vec{r}\,'|} = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} r \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_0^R r\,dr}_{R^2/2} \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} =$$

$$= \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi R^2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}.$$

Exercice 4

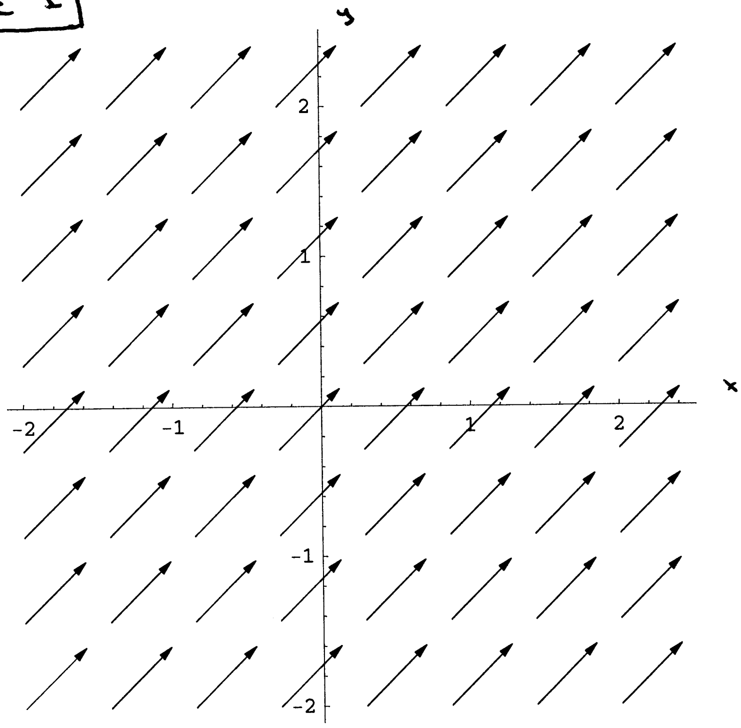
1). $$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx\,dy = \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} r\,dr\,d\varphi = \underbrace{\int_0^1 r\,dr}_{1/2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \pi$$

2). $$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} dx\,dy\,dz = \iiint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} r^2 \sin\theta \, dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 r^2\,dr}_{1/3} \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \frac{4}{3}\pi$$

Exercice 1

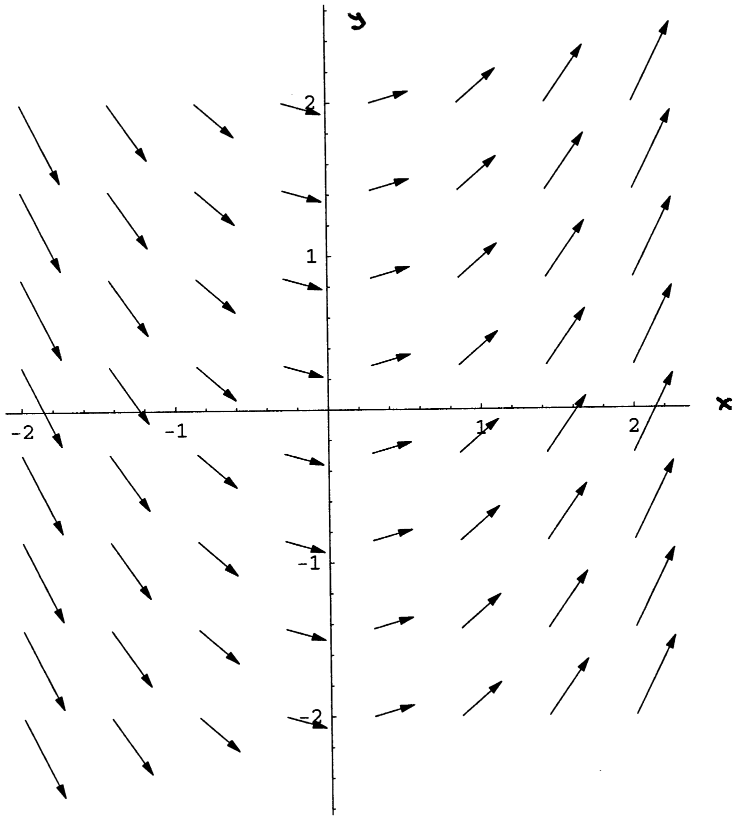
1).



$\vec{E}(x,y) = \frac{1}{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$

le module et la direction (celle du vecteur $\vec{e}_x + \vec{e}_y$) restent constants en tout point (x,y)

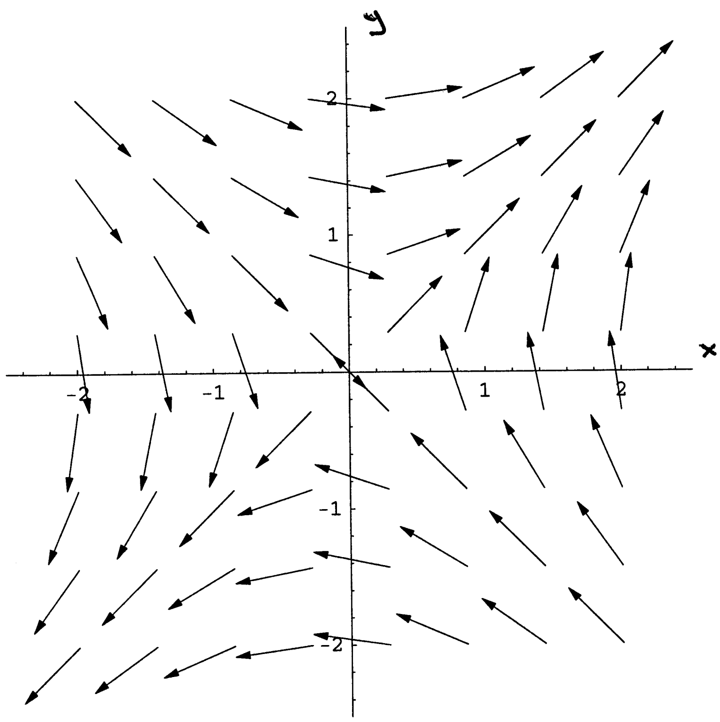
2).



$\vec{E}(x,y) = \vec{e}_x + x\vec{e}_y$

- en tout point la projection de $\vec{E}$ sur l'axe x est constante
- la composante E_y est >0 pour $x>0$ et est <0 pour $x<0$; son module augmente lorsque $|x|$ augmente
- pour $x=0$ (axe y) $\vec{E} = \vec{e}_x$ (parallèle à l'axe x)

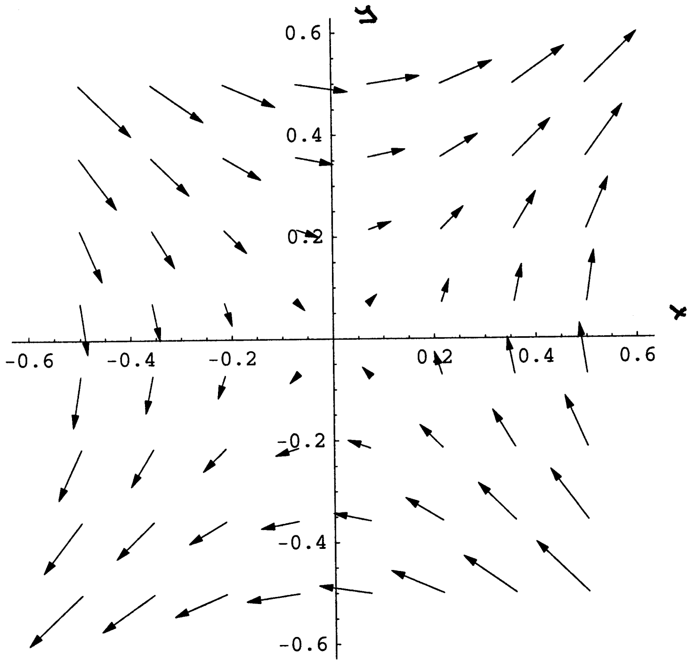
3).



$$\vec{E}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_y$$

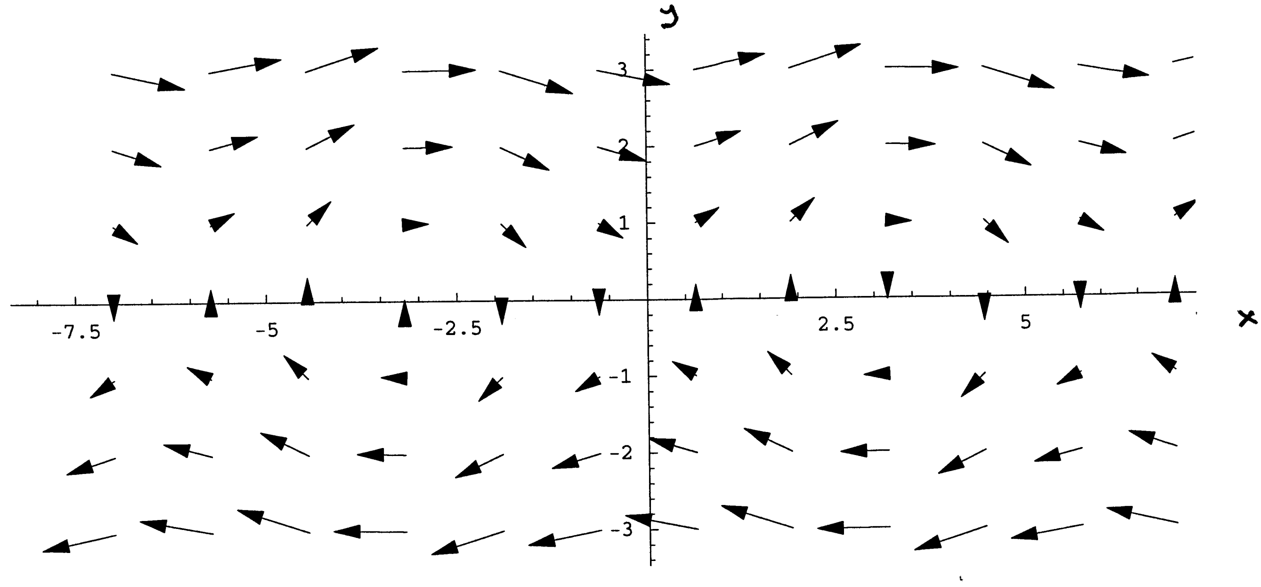
- le module $|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2+E_y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2}} = 1$ est constant en tout point de $\mathbb{R}^2$.
- pour $x=0$ (axe y) $\vec{E} = \operatorname{sgn} y \cdot \vec{e}_x$
- pour $y=0$ (axe x) $\vec{E} = \operatorname{sgn} x \; \vec{e}_y$
- pour $y=x$ on a $\vec{E} = \operatorname{sgn} x \; \frac{\vec{e}_x+\vec{e}_y}{\sqrt{2}}$
- pour $y=-x$ on a $\vec{E} = \operatorname{sgn} x \; \frac{\vec{e}_y-\vec{e}_x}{\sqrt{2}}$.

4).



$$\vec{E}(x,y) = y\vec{e}_x + \sin x \, \vec{e}_y$$

- pour $x, y \ll 1$ le champ doit ressembler
$$\vec{E}_0(x,y) = y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$$
en particulier:
  a). $|\vec{E}_0|$ augmente lorsque $|x|$ ou $|y|$ augmente
  b). pour $x=0$ (axe y) $\vec{E}_0 = y\vec{e}_x$ (horizontal)
  c). pour $y=0$ (axe x) $\vec{E}_0 = x\vec{e}_y$ (vertical)



$$\vec{E}(x,y) = y\,\vec{e}_x + \sin x\,\vec{e}_y$$

Lorsqu'on augmente l'échelle de l'image:

- périodicité en x (période $= 2\pi$)
- E_y reste bornée ($|E_y| \leq 1$), tandis que $|E_x|$ augmente lorsqu'on augmente $|y|$
- lignes du champ:

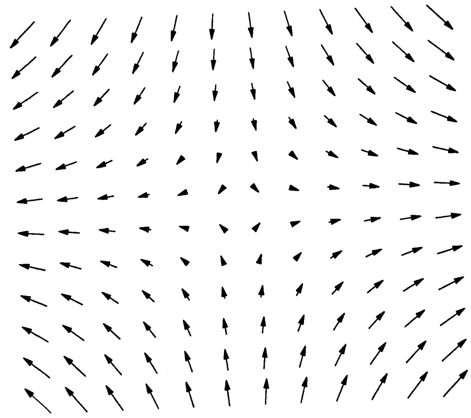
Exercice 2 $\quad \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y$

1). $f(x,y) = xy \Rightarrow \vec{\nabla} f = y\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y$

2). $f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \vec{\nabla} f = 2x\,\vec{e}_x - 2y\,\vec{e}_y$

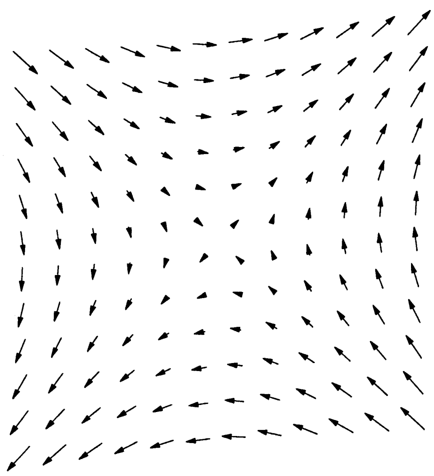
3). $f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \vec{\nabla} f = 2x\,\vec{e}_x + 2y\,\vec{e}_y$

4). $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \vec{\nabla} f = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{e}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{e}_y$



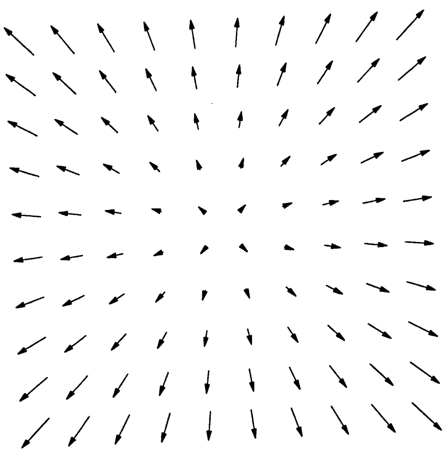
2). sur l'axe x (y=0) $\vec{E} = \vec{\nabla} f \parallel Ox$

sur l'axe y (x=0) $\vec{E} \parallel Oy$

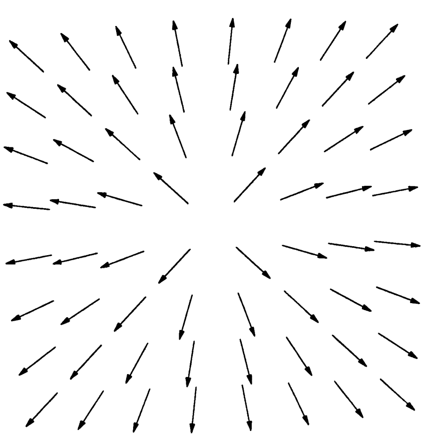


1). sur l'axe x (y=0) $\vec{E} = \vec{\nabla} f \perp Ox$

sur l'axe y (x=0) $\vec{E} \perp Oy$



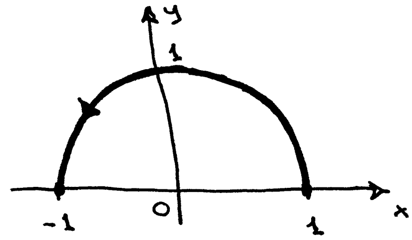
3). direction de $\vec{E} = \vec{\nabla} f$ est radiale, et son module $|\vec{E}|$ augmente lorsque r croît.



4). direction de $\vec{E} = \vec{\nabla} f$ est radiale, $|\vec{E}|$ est constant

Exercice 3

1). $I = \int_C (2 + x^2 y)\, ds$



Paramétrisation de C :

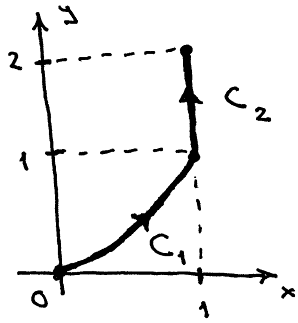
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0, \pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = -\sin t\, dt \\ dy = \cos t\, dt \\ ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\sin^2 t\, (dt)^2 + \cos^2 t\, (dt)^2} = dt \end{array}$$

Alors :

$$I = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t)\, dt = 2t \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos^2 t\, d(\cos t) =$$

$$= 2\pi - \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_{t=0}^{t=\pi} = 2\pi + \frac{2}{3}$$

2). $I = \int_C 2x\, ds = \underbrace{\int_{C_1} 2x\, ds}_{I_1} + \underbrace{\int_{C_2} 2x\, ds}_{I_2}$



Paramétrisation de C_1 :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ t \in [0, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = dt, \; dy = 2t\, dt \\ ds = \sqrt{(dt)^2 + 4t^2 (dt)^2} = \sqrt{1 + 4t^2}\, dt \end{array}$$

Donc

$$I_1 = \int_0^1 2t \sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \left| \begin{array}{l} 1 + 4t^2 = u \\ 8t\, dt = du \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int_1^5 \sqrt{u}\, du =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{u=1}^{u=5} = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 1)$$

De même, la paramétrisation de C_2 :

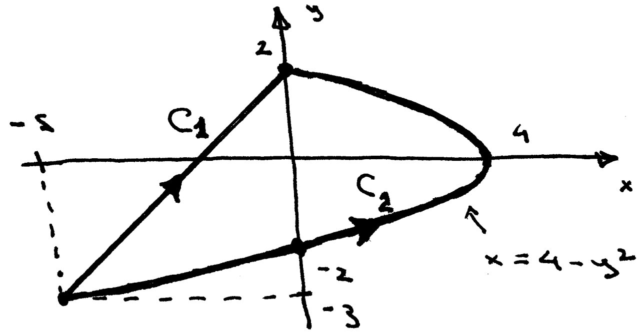
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ t \in [1, 2] \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = 0, \; dy = dt \\ ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dt \end{array}$$

et alors

$$I_2 = \int_1^2 2\, dt = 2,$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2 = \frac{5\sqrt{5} + 11}{6}$$

3). $I = \int_C y^2\,dx + x\,dy$



a). Paramétrisation de C_1:

$$\begin{cases} x = (-5)(1-t) + 0\cdot t = 5t-5 \\ y = (-3)(1-t) + 2\cdot t = 5t-3 \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

Remarque: en général, le segment qui relie 2 points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est paramétré par

$$\begin{cases} x(t) = x_1(1-t) + x_2 t, \\ y(t) = y_1(1-t) + y_2 t, \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

Dans notre cas $dx = 5\,dt$, $dy = 5\,dt$ et donc

$$I_1 = \int_{C_1} y^2\,dx + x\,dy = 5\int_0^1 \{(5t-3)^2\,dt + (5t-5)\,dt\} =$$

$$= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4)\,dt = 5\left(25\frac{t^3}{3} - 25\frac{t^2}{2} + 4t\right)\Big|_{t=0}^{t=1} =$$

$$= 5\left(4 - \frac{25}{6}\right) = -\frac{5}{6}$$

b). Paramétrisation de C_2:

$$\begin{cases} x = 4 - t^2 \\ y = t \\ t \in [-3, 2] \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} dx = -2t\,dt \\ dy = dt \end{matrix}$$

et alors

$$I_2 = \int_{C_2} y^2\,dx + x\,dy = \int_{-3}^{2} \underbrace{t^2}_{y^2}\underbrace{(-2t\,dt)}_{dx} + \underbrace{(4-t^2)}_{x}\underbrace{dt}_{dy} =$$

$$= \int_{-3}^{2} (-2t^3 - t^2 + 4)\,dt = \left(-2\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + 4t\right)\Big|_{t=-3}^{t=2} =$$

$$= \cancel{-8} - \frac{8}{3} + \cancel{8} + \frac{81}{2} - 9 + 12 = \frac{245}{6}$$

4). $I = \int_C y \sin z\,ds$. La paramétrisation de C est donnée explicitement:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t,\ t \in [0, 2\pi] \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} dx = -\sin t\,dt \\ dy = \cos t\,dt \\ dz = dt \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \\ = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\,dt = \\ = \sqrt{2}\,dt \end{matrix}$$

Alors

$$I = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin t}_{y} \cdot \underbrace{\sin t}_{\sin z} \cdot \underbrace{\sqrt{2}\, dt}_{ds} = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \sqrt{2}\,\pi$$

5). $$I = \int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \underbrace{\int_{C_1}}_{I_1} + \underbrace{\int_{C_2}}_{I_2}$$

Paramétrisation de C_1 :

$$\begin{cases} x = 2\cdot(1-t) + 3t = t+2 \\ y = 0\cdot(1-t) + 4t = 4t \\ z = 0\cdot(1-t) + 5t = 5t \\ t \in [0,1], \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = dt \\ dy = 4\,dt \\ dz = 5\,dt \end{array}$$

et alors

$$I_1 = \int_{C_1} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 \underbrace{4t}_{y}\, \underbrace{dt}_{dx} + \underbrace{5t}_{z} \cdot \underbrace{4dt}_{dy} + \underbrace{(t+2)}_{x}\, \underbrace{5dt}_{dz} =$$

$$= \int_0^1 (29t + 10)\, dt = \left(29 \frac{t^2}{2} + 10t\right)\Big|_0^1 = \frac{49}{2}.$$

De même, la paramétrisation de C_2 :

$$\begin{cases} x = 3(1-t) + 3t = 3 \\ y = 4(1-t) + 4t = 4 \\ z = 5(1-t) + 0\cdot t = 5 - 5t \\ t \in [0,1] \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = dy = 0 \\ dz = -5\,dt \end{array}$$

et donc

$$I_2 = \int_{C_2} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 \underbrace{3}_{x} \cdot \underbrace{(-5\,dt)}_{dz} = -15,$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{49}{2} - 15 = \frac{19}{2}.$$

6). Travail $$\mathcal{A} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \underbrace{F_x}_{x^2} dx + \underbrace{F_y}_{-xy} dy =$$

$$= \int_C x^2\, dx - xy\, dy.$$

Paramétrisation :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0, \pi/2] \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} dx &= -\sin t \, dt \\ dy &= \cos t \, dt \end{aligned}$$

et alors

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^2 t}_{x^2} \underbrace{(-\sin t dt)}_{dx} - \underbrace{\cos t \sin t}_{xy} \underbrace{\cos t \, dt}_{dy} =$$

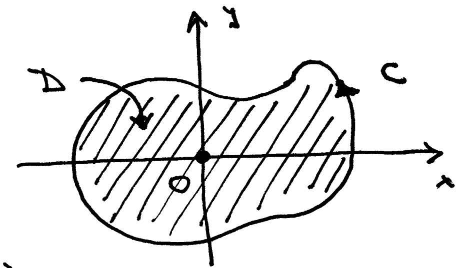
$$= -2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t \, dt = 2 \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

Exercice 4 $\quad \vec{E}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \vec{e}_x + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{e}_y .$

$$I = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_C -\frac{y \, dx}{x^2+y^2} + \frac{x \, dy}{x^2+y^2} =$$

$$= \int_C P \, dx + Q \, dy ,$$

où $P = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$.



Méthode 1 (incorrecte mais instructive)

On aurait pu penser au théorème de Green :

$$I = \int_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy ,$$

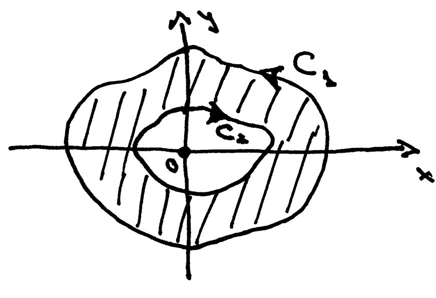
où D est le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par C. On a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right) = -\frac{1 \cdot (x^2+y^2) - 2y \cdot y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} ,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - 2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

et donc la réponse naïve est $I = 0$. L'erreur de ce raisonnement est la suivante : pour pouvoir appliquer le théorème de Green, les dérivées partielles de P et Q doivent être continues sur D, tandis que dans notre cas ce n'est pas vrai à l'origine. Ceci suggère la modification suivante :

Méthode 2. On peut appliquer le théorème de Green au domaine D représenté sur la figure, car D ne contient pas l'origine.



$$\int_{\substack{\text{frontière}\\ \text{de } D}} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \left| \begin{array}{l} \text{d'après le} \\ \text{calcul} \\ \text{précédent} \end{array} \right| = 0.$$

Par conséquent :

$$\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = -\int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

Autrement dit, $\int_C P\,dx + Q\,dy$ ne dépend pas du choix de la courbe fermée et orientée positivement C (rappelons qu'elle entoure une fois l'origine. Nous allons donc calculer I pour un choix particulier de C : on suppose que C est un cercle de rayon R, centré à l'origine.

Paramétrisation de C :

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = -R\sin t\,dt \\ dy = R\cos t\,dt \end{array}$$

$t \in [0, 2\pi]$

Donc :

$$I = \int_0^{2\pi} \Big\{ \underbrace{\frac{R\sin t}{R^2}}_{\frac{y}{x^2+y^2}} \cdot \underbrace{R\sin t\,dt}_{-dx} + \underbrace{\frac{R\cos t}{R^2}}_{\frac{x}{x^2+y^2}} \cdot \underbrace{R\cos t\,dt}_{dy} \Big\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{= 1}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

TD 5

Exercice 1

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + \vec{e}_z E_z =$$
$$= E_\rho \vec{e}_\rho + E_\varphi \vec{e}_\varphi + E_z \vec{e}_z =$$
$$= E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta + E_\varphi \vec{e}_\varphi .$$

Considérons la relation

$$E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z = E_\rho \vec{e}_\rho + E_\varphi \vec{e}_\varphi + E_z \vec{e}_z$$

En considérant le produit scalaire de cette relation avec $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ et en utilisant $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = 0$, on obtient

$$\begin{cases} E_\rho = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_\rho \, E_x + \vec{e}_y \cdot \vec{e}_\rho \, E_y + \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\rho \, E_z \\ E_\varphi = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_\varphi \, E_x + \vec{e}_y \cdot \vec{e}_\varphi \, E_y + \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\varphi \, E_z \\ E_z = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z \, E_x + \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z \, E_y + \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \, E_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} E_\rho \\ E_\varphi \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

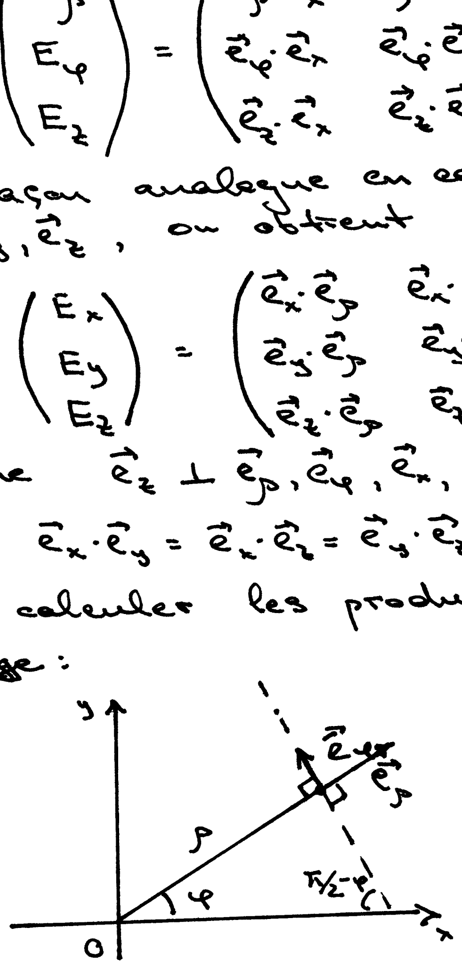
De façon analogue en considérant le produit scalaire avec $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, on obtient

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_\rho & \vec{e}_x \cdot \vec{e}_\varphi & \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_y \cdot \vec{e}_\rho & \vec{e}_y \cdot \vec{e}_\varphi & \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\rho & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\rho \\ E_\varphi \\ E_z \end{pmatrix}$$

Comme $\vec{e}_z \perp \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_x, \vec{e}_y$, on peut immédiatement écrire

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = 0 \,, \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z$$

Pour calculer les produits scalaires restants, considérons l'image :



$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_x = \cos\varphi$$
$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_y = \sin\varphi$$
$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_x = -\sin\varphi$$
$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_y = \cos\varphi .$$

Par conséquent nous avons :

$$(1)\quad \begin{pmatrix} E_\rho \\ E_\varphi \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix},$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\rho \\ E_\varphi \\ E_z \end{pmatrix}.$$

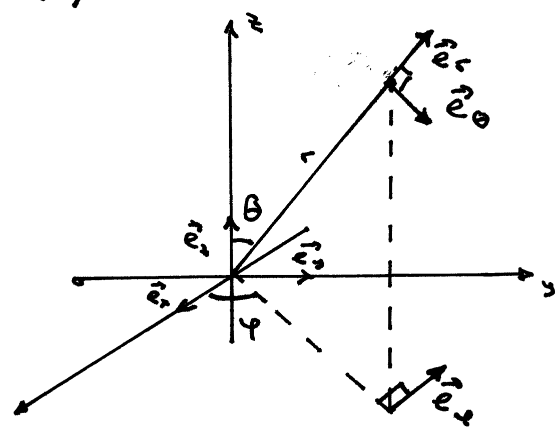
De façon analogue, en coordonnées sphériques :

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_r\cdot\vec{e}_x & \vec{e}_r\cdot\vec{e}_y & \vec{e}_r\cdot\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_x & \vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_y & \vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_x & \vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_y & \vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_x\cdot\vec{e}_r & \vec{e}_x\cdot\vec{e}_\theta & \vec{e}_x\cdot\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y\cdot\vec{e}_r & \vec{e}_y\cdot\vec{e}_\theta & \vec{e}_y\cdot\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z\cdot\vec{e}_r & \vec{e}_z\cdot\vec{e}_\theta & \vec{e}_z\cdot\vec{e}_\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\varphi \end{pmatrix}$$

Les produits scalaires sont :

$\vec{e}_r\cdot\vec{e}_x = \sin\theta\cos\varphi$
$\vec{e}_r\cdot\vec{e}_y = \sin\theta\sin\varphi$
$\vec{e}_r\cdot\vec{e}_z = \cos\theta$



$\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_x = -\sin\varphi$
$\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_y = \cos\varphi$
$\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_z = 0$

$\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_x = \cos\theta\cos\varphi$
$\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_y = \cos\theta\sin\varphi$
$\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_z = -\sin\theta$

et donc on obtient :

$$(3)\quad \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$(4)\quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\varphi \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1). Coordonnées cylindriques

On a besoin de formules qui expriment les dérivées par rapport à x et y en fonction des dérivées par rapport à ρ et φ :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial\rho} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \rho\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\partial_\rho \\ \partial_\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x \\ \partial_y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\partial_x \\ \partial_y\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}^{-1}}_{B}\begin{pmatrix}\partial_\rho \\ \partial_\varphi\end{pmatrix}$$

et alors

$$\begin{pmatrix}\partial_x \\ \partial_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\rho\cos\varphi}{\rho} & -\frac{\sin\varphi}{\rho} \\ \frac{\rho\sin\varphi}{\rho} & \frac{\cos\varphi}{\rho}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_\rho \\ \partial_\varphi\end{pmatrix} = \qquad \det B = \rho$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\frac{\sin\varphi}{\rho} \\ \sin\varphi & \frac{\cos\varphi}{\rho}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_\rho \\ \partial_\varphi\end{pmatrix}$$

a). Gradient $\vec{\nabla} f$.

$$(\vec{\nabla} f)_\rho = \left|\begin{matrix}\text{d'après} \\ (1)\end{matrix}\right| = \cos\varphi\underbrace{(\vec{\nabla} f)_x}_{\frac{\partial f}{\partial x}} + \sin\varphi\underbrace{(\vec{\nabla} f)_y}_{\frac{\partial f}{\partial y}} =$$

$$= \cos\varphi\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} - \cancel{\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}}\right)f + \sin\varphi\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} + \cancel{\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}}\right)f$$

$$= (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\frac{\partial f}{\partial\rho} = \frac{\partial f}{\partial\rho}$$

$$(\vec{\nabla} f)_\varphi = \left|\begin{matrix}\text{d'après} \\ (1)\end{matrix}\right| = -\sin\varphi\left(\cancel{\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)f +$$

$$+ \cos\varphi\left(\cancel{\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)f =$$

$$= \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}$$

$$(\vec{\nabla} f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Par conséquent: $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$

b). Divergence $\operatorname{div}\vec{E}$.

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z = \left|\begin{matrix}\text{d'après} \\ (2)\end{matrix}\right| =$$

$$= \underbrace{\left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)}_{\partial_x} \underbrace{\left(\cos\varphi\, E_\rho - \sin\varphi\, E_\varphi\right)}_{E_x} +$$

$$\underbrace{\left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)}_{\partial_y} \underbrace{\left(\sin\varphi\, E_\rho + \cos\varphi\, E_\varphi\right)}_{E_y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} =$$

$$= \cos^2\varphi \frac{\partial E_\rho}{\partial\rho} - \cancel{\cos\varphi \sin\varphi \frac{\partial E_\varphi}{\partial\rho}} - \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial\varphi}} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho} E_\rho$$

$$+ \frac{\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} + \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}} E_\varphi + \sin^2\varphi \frac{\partial E_\rho}{\partial\rho} + \cancel{\sin\varphi\cos\varphi \frac{\partial E_\varphi}{\partial\rho}}$$

$$+ \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial\varphi}} + \frac{\cos^2\varphi}{\rho} E_\rho + \frac{\cos^2\varphi}{\rho}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} - \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}} E_\varphi + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$= \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\frac{\partial E_\rho}{\partial\rho} + \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\rho} E_\rho + \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\rho}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial E_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho} E_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

e). Rotationnel $\mathrm{rot}\,\vec{E}$.

$$(\mathrm{rot}\,\vec{E})_\rho = \cos\varphi\,(\mathrm{rot}\,\vec{E})_x + \sin\varphi\,(\mathrm{rot}\,\vec{E})_y =$$

$$= \cos\varphi\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \sin\varphi\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) =$$

$$= \cos\varphi\left(\cancel{\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)E_z - \cos\varphi\frac{\partial}{\partial z}\left(\cancel{\sin\varphi} E_\rho + \cos\varphi\, E_\varphi\right)$$

$$+ \sin\varphi \frac{\partial}{\partial z}\left(\cancel{\cos\varphi} E_\rho - \sin\varphi\, E_\varphi\right) - \sin\varphi\left(\cancel{\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)E_z$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{E})_\varphi = -\sin\varphi\,(\mathrm{rot}\,\vec{E})_x + \cos\varphi\,(\mathrm{rot}\,\vec{E})_y =$$

$$= -\sin\varphi\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} + \cancel{\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}}\right)E_z + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial z}\left(\sin\varphi\, E_\rho + \cancel{\cos\varphi\, E_\varphi}\right)$$

$$+ \cos\varphi\frac{\partial}{\partial z}\left(\cos\varphi\, E_\rho - \cancel{\sin\varphi\, E_\varphi}\right) - \cos\varphi\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} - \cancel{\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}}\right)E_z$$

$$= \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial\rho}$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\varphi\, E_\rho + \cos\varphi\, E_\varphi\right)$$

$$- \left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi\, E_\rho - \sin\varphi\, E_\varphi\right) =$$

$$= \cancel{\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial E_\rho}{\partial\rho}} + \cos^2\varphi\frac{\partial E_\varphi}{\partial\rho} - \frac{\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial\varphi} - \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}E_\rho} - \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}}$$

$$+ \frac{\sin^2\varphi}{\rho}E_\varphi - \cancel{\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial E_\rho}{\partial\rho}} + \sin^2\varphi\frac{\partial E_\varphi}{\partial\rho} - \frac{\cos^2\varphi}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial\varphi} + \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}E_\rho}$$

$$+ \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}} + \frac{\cos^2\varphi}{\rho}E_\varphi = \frac{\partial E_\varphi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho}E_\varphi$$

Donc :

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+\left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}E_\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z .$$

d). Laplacien Δf.

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f = \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)$$

$$+\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$$

$$= \cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} - \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial\rho\partial\varphi}} + \cancel{\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial\varphi}} - \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial\rho}}$$

$$+ \frac{\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial\varphi}} +$$

$$+ \sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial\rho\partial\varphi}} - \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial\varphi}} + \cancel{\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial\rho}}$$

$$+ \frac{\cos^2\varphi}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} - \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial\varphi}} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Par conséquent :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2). Coordonnées sphériques

Ici on doit exprimer les dérivées par rapport à x, y et z en fonction des dérivées par rapport à r, θ et φ.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

Donc (voir Exercice 1)

$$\begin{pmatrix}\partial_r\\ \partial_\theta\\ \partial_\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r&0\\0&0&r\sin\theta\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r^{-1}&0\\0&0&(r\sin\theta)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_r\\ \partial_\theta\\ \partial_\varphi\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\\ \sin\theta\sin\varphi & \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\\ \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_r\\ \partial_\theta\\ \partial_\varphi\end{pmatrix}$$

a). Gradient $\vec{\nabla} f$.

$$(\vec{\nabla} f)_r=\left|\begin{matrix}\text{d'après}\\(3)\end{matrix}\right|=\sin\theta\cos\varphi\underbrace{(\vec{\nabla} f)_x}_{\frac{\partial f}{\partial x}}+\sin\theta\sin\varphi\underbrace{(\vec{\nabla} f)_y}_{\frac{\partial f}{\partial y}}+\cos\theta\underbrace{(\vec{\nabla} f)_z}_{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

$$=\sin\theta\cos\varphi\left(\sin\theta\cos\varphi\,\partial_r f+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\partial_\theta f-\cancel{\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi f}\right)+$$

$$+\sin\theta\sin\varphi\left(\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r f+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\partial_\theta f+\cancel{\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi f}\right)+$$

$$+\cos\theta\left(\cos\theta\,\partial_r f-\frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta f\right)=$$

$$=\{\underbrace{\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi}_{=\sin^2\theta}+\cos^2\theta\}\partial_r f+$$

$$+\{\underbrace{\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi+\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi}{r}}_{=\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\}\partial_\theta f=\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$(\vec{\nabla} f)_\theta=\left|\begin{matrix}\text{d'après}\\(3)\end{matrix}\right|=\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}-\sin\theta\frac{\partial f}{\partial z}=$$

$$=\cos\theta\cos\varphi\left(\sin\theta\cos\varphi\,\partial_r f+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\partial_\theta f-\cancel{\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi f}\right)+$$

$$+\cos\theta\sin\varphi\left(\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r f+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\partial_\theta f+\cancel{\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi f}\right)-$$

$$-\sin\theta\left(\cos\theta\,\partial_r f-\frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta f\right)=$$

$$=\{\underbrace{\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi+\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi}_{=\cos\theta\sin\theta}-\sin\theta\cos\theta\}\partial_r f$$

$$+\{\underbrace{\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r}+\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{r}}_{=\cos^2\theta/r}+\frac{\sin^2\theta}{r}\}\partial_\theta f=\frac{1}{r}\partial_\theta f=\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}$$

$$(\vec{\nabla} f)_\varphi = \left| \begin{matrix} \text{d'après} \\ (3) \end{matrix} \right| = -\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$= -\sin\varphi \left(\cancel{\sin\theta\cos\varphi\, \partial_r f} + \cancel{\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} \partial_\theta f} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} \partial_\varphi f \right) +$$

$$+ \cos\varphi \left(\cancel{\sin\theta\sin\varphi\, \partial_r f} + \cancel{\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} \partial_\theta f} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} \partial_\varphi f \right) =$$

$$= \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{r\sin\theta} \partial_\varphi f = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

Par conséquent : $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

b). Divergence $\operatorname{div} \vec{E}$.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \left| \begin{matrix} \text{d'après} \\ (4) \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(\sin\theta\cos\varphi\, \partial_r + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} \partial_\theta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} \partial_\varphi \right) \left(\sin\theta\cos\varphi\, E_r + \cos\theta\cos\varphi\, E_\theta - \sin\varphi\, E_\varphi \right) +$$

$$+ \left(\sin\theta\sin\varphi\, \partial_r + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} \partial_\theta + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} \partial_\varphi \right) \left(\sin\theta\sin\varphi\, E_r + \cos\theta\sin\varphi\, E_\theta + \cos\varphi\, E_\varphi \right) +$$

$$+ \left(\cos\theta\, \partial_r - \frac{\sin\theta}{r} \partial_\theta \right) \left(\cos\theta\, E_r - \sin\theta\, E_\theta \right) =$$

$$= \Big\{ \sin^2\theta\cos^2\varphi\, \partial_r + \cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi}{r} \partial_\theta} + \frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r} - \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} \partial_\varphi}$$

$$+ \frac{\sin^2\varphi}{r} + \sin^2\theta\sin^2\varphi\, \partial_r + \cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi}{r} \partial_\theta} + \frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{r}$$

$$+ \cancel{\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r}} \partial_\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{r} + \cos^2\theta\, \partial_r - \cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} \partial_\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r} \Big\} E_r$$

$$+ \Big\{ \sin\theta\, \cancel{\cos\theta\cos^2\varphi}\, \partial_r + \frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r} \partial_\theta - \cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi}{r}}$$

$$- \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi\, \mathrm{ctg}\,\theta}{r}} \partial_\varphi + \frac{\sin^2\varphi\, \mathrm{ctg}\,\theta}{r} + \sin\theta\, \cancel{\cos\theta\sin^2\varphi\, \partial_r}$$

$$+ \frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{r} \partial_\theta - \cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi}{r}} + \cancel{\frac{\cos\varphi\sin\varphi\, \mathrm{ctg}\,\theta}{r}} \partial_\varphi$$

$$+ \frac{\cos^2\varphi\, \mathrm{ctg}\,\theta}{r} - \cancel{\cos\theta\sin\theta\, \partial_r} + \frac{\sin^2\theta}{r} \partial_\theta + \cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}} \Big\} E_\theta$$

$$+ \Big\{ - \cancel{\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\, \partial_r} - \cancel{\frac{\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r} \partial_\theta} + \frac{\sin^2\varphi}{r\sin\theta} \partial_\varphi + \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r\sin\theta}}$$

$$+ \cancel{\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\, \partial_r} + \cancel{\frac{\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r} \partial_\theta} + \frac{\cos^2\varphi}{r\sin\theta} \partial_\varphi - \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r\sin\theta}} \Big\} E_\varphi =$$

$$= \left\{ \partial_r + \frac{2}{r} \right\} E_r + \left\{ \frac{1}{r} \partial_\theta + \frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r} \right\} E_\theta + \frac{1}{r\sin\theta} \partial_\varphi E_\varphi$$

Donc :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{2}{r} E_r + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r} E_\theta + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$$

c). Rotationnel rot $\vec E$.

$$(\mathrm{rot}\,\vec E)_r = \left|\begin{matrix}\text{d'après}\\(3)\end{matrix}\right| = \sin\theta\cos\varphi\,(\mathrm{rot}\,\vec E)_x + \sin\theta\sin\varphi\,(\mathrm{rot}\,\vec E)_y + \cos\theta\,(\mathrm{rot}\,\vec E)_z$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+\sin\theta\sin\varphi\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+\cos\theta\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\left\{\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\partial_\theta+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi\right\}(\cos\theta E_r-\sin\theta E_\theta)$$

$$-\sin\theta\cos\varphi\left\{\cos\theta\,\partial_r-\frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta\right\}(\sin\theta\sin\varphi E_r+\cos\theta\sin\varphi E_\theta+\cos\varphi E_\varphi)$$

$$+\sin\theta\sin\varphi\left\{\cos\theta\,\partial_r-\frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta\right\}(\sin\theta\cos\varphi E_r+\cos\theta\cos\varphi E_\theta-\sin\varphi E_\varphi)$$

$$-\sin\theta\sin\varphi\left\{\sin\theta\cos\varphi\,\partial_r+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\partial_\theta-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi\right\}(\cos\theta E_r-\sin\theta E_\theta)+$$

$$+\cos\theta\left\{\sin\theta\cos\varphi\,\partial_r+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\partial_\theta-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi\right\}(\sin\theta\sin\varphi E_r+\cos\theta\sin\varphi E_\theta+\cos\varphi E_\varphi)$$

$$-\cos\theta\left\{\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\partial_\theta+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi\right\}(\sin\theta\cos\varphi E_r+\cos\theta\cos\varphi E_\theta-\sin\varphi E_\varphi)$$

$$=\sin\theta\cos\varphi\Big\{\Big[\sin\theta\cancel{\cos\theta\sin\varphi}\,\partial_r+\frac{\cos^2\theta\sin\varphi}{r}\partial_\theta-\cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta\sin\varphi}{r}}+\frac{\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\partial_\varphi$$

$$-\sin\theta\cancel{\cos\theta\sin\varphi}\,\partial_r+\frac{\sin^2\theta\sin\varphi}{r}\partial_\theta+\cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\varphi}{r}}\Big]E_r$$

$$+\Big[-\sin^2\theta\sin\varphi\,\partial_r-\cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\varphi}{r}}\partial_\theta-\frac{\cos^2\theta\sin\varphi}{r}-\frac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi$$

$$-\cos^2\theta\sin\varphi\,\partial_r+\cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\varphi}{r}}\partial_\theta-\frac{\sin^2\theta\sin\varphi}{r}\Big]E_\theta$$

$$-\cos\varphi\Big[\cos\theta\,\partial_r-\frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta\Big]E_\varphi\Big\}$$

$$+\sin\theta\sin\varphi\Big\{\Big[\cos\theta\cancel{\sin\theta}\cos\varphi\,\partial_r-\frac{\sin^2\theta\cos\varphi}{r}\partial_\theta-\cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\varphi}{r}}-\sin\theta\cancel{\cos\theta\cos\varphi}\,\partial_r$$

$$-\frac{\cos^2\theta\cos\varphi}{r}\partial_\theta+\cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}{r}}+\frac{\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\partial_\varphi\Big]E_r$$

$$+\Big[\cos^2\theta\cos\varphi\,\partial_r-\cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\varphi}{r}}\partial_\theta+\frac{\sin^2\theta\cos\varphi}{r}+\sin^2\theta\cos\varphi\,\partial_r$$

$$+\cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}{r}}\partial_\theta+\frac{\cos^2\theta\cos\varphi}{r}-\frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi\Big]E_\theta-$$

$$-\sin\varphi\Big[\cos\theta\,\partial_r-\frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta\Big]E_\varphi\Big\}$$

$$+\cos\theta\Big\{\Big[\sin^2\theta\cancel{\cos\varphi\sin\varphi}\,\partial_r+\cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r}}\partial_\theta+\cancel{\frac{\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r}}$$

$$-\frac{\sin^2\varphi}{r}\partial_\varphi-\cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}}-\sin^2\theta\cancel{\sin\varphi\cos\varphi}\,\partial_r-\cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r}}\partial_\theta$$

$$-\cancel{\frac{\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r}}-\frac{\cos^2\varphi}{r}\partial_\varphi+\cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}}\Big]E_r$$

$$+\Big[\sin\theta\cos\theta\cancel{\sin\varphi}\cos\varphi\,\partial_r+\frac{\cos^2\theta\cancel{\cos\varphi\sin\varphi}}{r}\partial_\theta-\cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r}}$$

$$-\frac{\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\partial_\varphi-\cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}}-\sin\theta\cancel{\cos\theta\cos\varphi}\sin\varphi\,\partial_r$$

$$-\frac{\cos^2\theta\cancel{\sin\varphi\cos\varphi}}{r}\partial_\theta+\cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r}}-\frac{\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\partial_\varphi+\cancel{\frac{\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}}\Big]+$$

$$+\left[\sin\theta\cos^2\varphi\,\partial_r + \frac{\cos\theta\cos^2\varphi}{r}\partial_\theta - \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r\sin\theta}\right.$$

$$\left. + \sin\theta\sin^2\varphi\,\partial_r + \frac{\cos\theta\sin^2\varphi}{r}\partial_\theta + \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r\sin\theta}\right]E_\varphi\Big\} =$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\Big\{\left[\frac{\sin\varphi}{r}\partial_\theta + \frac{\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\partial_\varphi\right]E_r +$$

$$+\left[-\sin\varphi\,\partial_r - \frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi\right]E_\theta$$

$$-\cos\varphi\left[\cos\theta\,\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta\right]E_\varphi\Big\}$$

$$+\sin\theta\sin\varphi\Big\{\left[-\frac{\cos\varphi}{r}\partial_\theta + \frac{\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\partial_\varphi\right]E_r +$$

$$+\left[\cos\varphi\,\partial_r + \frac{\cos\varphi}{r} - \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi\right]E_\theta$$

$$-\sin\varphi\left[\cos\theta\,\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta\right]E_\varphi\Big\}$$

$$+\cos\theta\Big\{\left[-\frac{1}{r}\partial_\varphi\right]E_r + \left[-\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\partial_\varphi\right]E_\theta +$$

$$+\left[\sin\theta\,\partial_r + \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\right]E_\varphi\Big\} =$$

$$= \left[\cancel{\frac{\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r}\partial_\theta} + \frac{\cos\theta\cos^2\varphi}{r}\partial_\varphi - \cancel{\frac{\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r}\partial_\theta} +\right.$$

$$\left. + \frac{\cos\theta\sin^2\varphi}{r}\partial_\varphi - \cancel{\frac{\cos\theta}{r}\partial_\varphi}\right]E_r$$

$$+\left[-\sin\theta\,\cancel{\sin\varphi\cos\varphi\,\partial_r} - \cancel{\frac{\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r}} - \frac{\sin\theta\cos^2\varphi}{r}\partial_\varphi\right.$$

$$+\sin\theta\,\cancel{\sin\varphi\cos\varphi\,\partial_r} + \cancel{\frac{\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r}} - \frac{\sin\theta\sin^2\varphi}{r}\partial_\varphi$$

$$\left.-\cos\theta\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\partial_\varphi\right]E_\theta$$

$$+\left[-\sin\theta\,\cancel{\cos\theta\cos^2\varphi\,\partial_r} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{r}\partial_\theta - \cancel{\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\,\partial_r}\right.$$

$$\left.+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{r}\partial_\theta + \cancel{\sin\theta\cos\theta\,\partial_r} + \frac{\cos^2\theta}{r}\partial_\theta + \frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\right]E_\varphi =$$

$$= \left[-\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi\right]E_\theta + \left[\frac{1}{r}\partial_\theta + \frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\right]E_\varphi =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\theta} + \frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r}E_\varphi - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}.$$

De façon analogue:

$$(\mathrm{rot}\,\vec{E})_\theta = \left|\begin{matrix}\text{d'après}\\(3)\end{matrix}\right| =$$

$$= \cos\theta\cos\varphi\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \cos\theta\sin\varphi\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) - \sin\theta\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \cos\theta\cos\varphi \Big\{ \Big[\cancel{\tfrac{\sin\varphi}{r}\partial_\theta} + \tfrac{\cos\varphi \,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\partial_\varphi \Big] E_r +$$

$$+ \Big[\cancel{-\sin\varphi\,\partial_r} - \cancel{\tfrac{\sin\varphi}{r}} - \tfrac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi \Big] E_\theta$$

$$- \cos\varphi \Big[\cos\theta\,\partial_r - \tfrac{\sin\theta}{r}\partial_\theta \Big] E_\varphi \Big\} +$$

$$+ \cos\theta\sin\varphi \Big\{ \Big[\cancel{-\tfrac{\cos\varphi}{r}\partial_\theta} + \tfrac{\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\partial_\varphi \Big] E_r +$$

$$+ \Big[\cancel{\cos\varphi\,\partial_r} + \cancel{\tfrac{\cos\varphi}{r}} - \tfrac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi \Big] E_\theta$$

$$- \sin\varphi \Big[\cos\theta\,\partial_r - \tfrac{\sin\theta}{r}\partial_\theta \Big] E_\varphi \Big\}$$

$$- \sin\theta \Big\{ \Big[-\tfrac{1}{r}\partial_\varphi \Big] E_r + \Big[-\tfrac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\partial_\varphi \Big] E_\theta +$$

$$+ \Big[\sin\theta\,\partial_r + \tfrac{\cos\theta}{r}\partial_\theta + \tfrac{1}{r\sin\theta} \Big] E_\varphi \Big\} =$$

$$= \Big[\tfrac{\cos^2\theta}{r\sin\theta}\partial_\varphi + \tfrac{\sin\theta}{r}\partial_\varphi \Big] E_r + \Big[\cancel{-\tfrac{\cos\theta}{r}\partial_\varphi} + \cancel{\tfrac{\cos\theta}{r}\partial_\varphi} \Big] E_\theta$$

$$+ \Big[-\cos\theta \big(\cos\theta\,\partial_r - \cancel{\tfrac{\sin\theta}{r}\partial_\theta}\big) - \sin\theta\big(\sin\theta\,\partial_r + \cancel{\tfrac{\cos\theta}{r}\partial_\theta} + \tfrac{1}{r\sin\theta}\big) \Big] E_\varphi =$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi E_r + \Big[-\partial_r - \frac{1}{r} \Big] E_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}E_\varphi$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{E})_\varphi = \left| \begin{matrix} \text{d'après} \\ (3) \end{matrix} \right| = -\sin\varphi\Big(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\Big) + \cos\varphi\Big(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\Big) =$$

$$= -\sin\varphi \Big\{ \Big[\tfrac{\sin\varphi}{r}\partial_\theta + \tfrac{\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\partial_\varphi \Big] E_r +$$

$$+ \Big[-\sin\varphi\,\partial_r - \sin\varphi - \tfrac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi \Big] E_\theta$$

$$- \cos\varphi \cancel{\Big[\cos\theta\,\partial_r - \tfrac{\sin\theta}{r}\partial_\theta \Big] E_\varphi} \Big\}$$

$$+ \cos\varphi \Big\{ \Big[-\tfrac{\cos\varphi}{r}\partial_\theta + \tfrac{\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\partial_\varphi \Big] E_r +$$

$$+ \Big[\cos\varphi\,\partial_r + \tfrac{\cos\varphi}{r} - \tfrac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi \Big] E_\theta$$

$$- \sin\varphi \cancel{\Big[\cos\theta\,\partial_r - \tfrac{\sin\theta}{r}\partial_\theta \Big] E_\varphi} \Big\} =$$

$$= \Big[-\frac{1}{r}\partial_\theta \Big] E_r + \Big[\partial_r + \frac{1}{r} \Big] E_\theta = \frac{\partial E_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}E_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\theta}.$$

Expression finale:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \Big\{ \frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\theta} + \frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r}E_\varphi - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi} \Big\}\vec{e}_r +$$

$$+ \Big\{ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}E_\varphi \Big\}\vec{e}_\theta + \Big\{ \frac{\partial E_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}E_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\theta} \Big\}\vec{e}_\varphi$$

d). Laplacien Δ.

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f =$$

$$= \left(\sin\theta\cos\varphi\, \partial_r + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\partial_\theta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi\right)\left(\sin\theta\cos\varphi\,\partial_r f + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\partial_\theta f - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi f\right) +$$

$$+ \left(\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\partial_\theta + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi\right)\left(\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r f + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\partial_\theta f + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi f\right) +$$

$$+ \left(\cos\theta\,\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta\right)\left(\cos\theta\,\partial_r f - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta f\right) =$$

$$= \sin\theta\,\partial_r\left\{\sin\theta\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}\partial_r f + \frac{\cos\theta}{r}\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}\partial_\theta f\right\} +$$

$$+ \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta\left\{\sin\theta\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}\partial_r f + \frac{\cos\theta}{r}\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}\partial_\theta f\right\} -$$

$$- \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi\left(\sin\theta\cos\varphi\,\partial_r f + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\partial_\theta f - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi f\right) +$$

$$+ \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi\left(\sin\theta\sin\varphi\,\partial_r f + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\partial_\theta f + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi f\right) +$$

$$+ \left(\cos\theta\,\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta\right)\left(\cos\theta\,\partial_r f - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta f\right) =$$

$$= \sin^2\theta\,\partial_{rr} f + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\partial_{r\theta} f - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\partial_\theta f$$

$$+ \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\partial_{\theta r} f + \frac{\cos^2\theta}{r}\partial_r f + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\partial_{\theta\theta} f - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\partial_\theta f$$

$$- \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\partial_{r\varphi} f} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\partial_r f - \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\partial_{\theta\varphi} f} + \frac{\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\partial_\theta f$$

$$+ \frac{\sin^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}\partial_{\varphi\varphi} f + \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}}\partial_\varphi f$$

$$+ \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\partial_{r\varphi} f} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\partial_r f + \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\partial_{\theta\varphi} f} + \frac{\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\partial_\theta f$$

$$+ \frac{\cos^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}\partial_{\varphi\varphi} f - \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}}\partial_\varphi f +$$

$$+ \left(\cos\theta\,\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta\right)\left(\cos\theta\,\partial_r f - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta f\right) =$$

$$= \sin^2\theta\,\partial_{rr} f + \cancel{2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\partial_{r\theta}} f - \cancel{2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}}\partial_\theta f + \frac{\cos^2\theta}{r}\partial_r f$$

$$+ \frac{\cos^2\theta}{r^2}\partial_{\theta\theta} f + \frac{1}{r}\partial_r f + \frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\partial_\theta f + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_{\varphi\varphi} f$$

$$+ \cos^2\theta\,\partial_{rr} f - \cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}}\partial_{\theta r} f + \frac{\sin^2\theta}{r}\partial_r f - \cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}}\partial_{r\theta} f$$

$$+ \cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}}\partial_\theta f + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\partial_{\theta\theta} f + \cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}}\partial_\theta f =$$

$$= \partial_{rr} f + \frac{2}{r}\partial_r f + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta} f + \frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\partial_\theta f + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_{\varphi\varphi} f$$

Donc:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

TD 6

Exercice 1

1). $I = \int_0^{2\pi} \frac{dp}{a - \sin p}$

C'est une intégrale du 1er type standard calculable à l'aide du théorème de résidus.

Changement de variables:

$$z = e^{ip}, \quad dz = i e^{ip} dp = iz dp \Rightarrow dp = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos p = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin p = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

Alors I s'écrit comme une intégrale le long d'un contour fermé (cercle $|z| = 1$) dans le plan complexe z:

$$I = \oint_{\substack{|z|=1 \\ \circlearrowleft}} \frac{dz}{iz} \cdot \frac{1}{a - \frac{z - z^{-1}}{2i}} = \oint_{\substack{|z|=1 \\ \circlearrowleft}} \frac{dz}{iaz - \frac{z^2 - 1}{2}} =$$

$$= -2 \oint_{\substack{|z|=1 \\ \circlearrowleft}} \frac{dz}{z^2 - 2iaz - 1} = -2 \cdot 2\pi i \sum_{\substack{\text{points} \\ \text{singuliers} \\ \text{à l'intérieur} \\ \text{de } |z|=1}} \text{res} \frac{1}{z^2 - 2iaz - 1}$$

Pour étudier les singularités / résidus, écrivons $z^2 - 2iaz - 1$ sous forme factorisée:

$$z^2 - 2iaz - 1 = 0$$

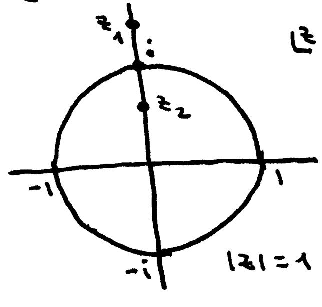
$$D = -4a^2 + 4 = -4(a^2 - 1) = \left(2i\sqrt{a^2 - 1}\right)^2$$

$$z_1 = \frac{2ia + 2i\sqrt{a^2 - 1}}{2} = i\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)$$

$$z_2 = \frac{2ia - 2i\sqrt{a^2 - 1}}{2} = i\left(a - \sqrt{a^2 - 1}\right)$$

- $z_{1,2}$ sont 2 nombres purement imaginaires, avec la partie imaginaire strictement positive (on suppose que $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$).
- l'équation $z^2 - 2iaz - 1 = 0$ implique que $|z_1| |z_2| = 1 \Rightarrow$ si le module d'une des racines est > 1, alors le module de l'autre est < 1. Ceci permet de conclure, que z_1 se trouve à l'extérieur de $|z| = 1$ et z_2 est à l'intérieur
- comme $\frac{1}{z^2 - iaz - 1} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)}$,

  les seuls points singuliers sont $z = z_1$ ou z_2 $\longrightarrow$ 2 pôles simples.



Donc on obtient :

$$I = -4\pi i \operatorname*{res}_{z=z_2}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\right) = -4\pi i \lim_{z\to z_2} \cancel{(z-z_2)}\cdot\frac{1}{(z-z_1)\cancel{(z-z_2)}} =$$

$$= -4\pi i\,\frac{1}{z_2-z_1} = -4\pi i\,\frac{1}{i(\alpha-\sqrt{a^2-1})-i(\alpha+\sqrt{a^2-1})} = \frac{-4\pi i}{-2i\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

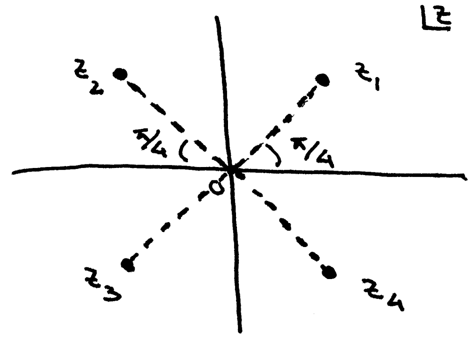
2). $I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \left|\begin{array}{l}\text{on a une intégrale sur } [0,\infty) \\ \text{d'une fonction paire}\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}$

C'est donc une intégrale du 2ème type standard calculable avec le théorème de résidus :

$$I = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \sum_{\substack{\text{singularités}\\ \text{dans le demi-plan}\\ \text{supérieur}}} \operatorname{res}\frac{1}{1+z^4}.$$

Etudions donc la structure de singularités de la fonction $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$. L'équation $z^4+1=0$ a 4 racines différentes :

4 pôles simples
$$\begin{cases} z_1 = e^{i\pi/4} \\ z_2 = e^{3i\pi/4} \\ z_3 = e^{-3i\pi/4} \\ z_4 = e^{-i\pi/4} \end{cases}$$



(pour trouver ces racines : $z^4 = e^{\pi i} \Rightarrow z = e^{i(\pi+2\pi k)/4}$, $k\in\mathbb{Z}$).

Donc on voit que

$$I = \pi i\left\{\underbrace{\operatorname*{res}_{z=z_1}\frac{1}{z^4+1}}_{R_1} + \underbrace{\operatorname*{res}_{z=z_2}\frac{1}{z^4+1}}_{R_2}\right\}$$

Comme $\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$, les résidus sont :

$$R_1 = \lim_{z\to z_1}\cancel{(z-z_1)}\frac{1}{\cancel{(z-z_1)}(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}$$

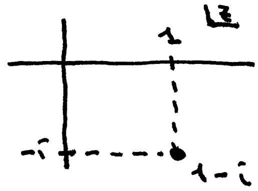
$$R_2 = \lim_{z\to z_2}\cancel{(z-z_2)}\frac{1}{(z-z_1)\cancel{(z-z_2)}(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)}$$

et donc

$$I = \frac{\pi i}{z_1-z_2}\left\{\frac{1}{(z_1-z_3)(z_1-z_4)} - \frac{1}{(z_2-z_3)(z_2-z_4)}\right\} =$$

$$= \frac{\pi i}{\underbrace{e^{\pi i/4}(1-e^{i\pi/2})}_{\substack{= i \\ z_1 - z_2}}} \left\{ \frac{1}{\underbrace{e^{-3i\pi/4}(e^{i\pi}-1)}_{\substack{= -1 \\ z_1 - z_3}}\underbrace{e^{-i\pi/4}(e^{i\pi/2}-1)}_{\substack{= i \\ z_1 - z_4}}} - \frac{1}{\underbrace{e^{-3i\pi/4}(e^{3i\pi/2}-1)}_{\substack{= -i \\ z_2 - z_3}}\underbrace{e^{-i\pi/4}(e^{i\pi}-1)}_{\substack{= -1 \\ z_2 - z_4}}} \right\}$$

$$= \frac{\pi i}{e^{\pi i/4}(1-i)} \left\{ \frac{1}{2(i-1)} + \frac{1}{2(i+1)} \right\} = \frac{\pi i}{2e^{\pi i/4}(1-i)} \; \frac{i+\cancel{1}+i-\cancel{1}}{\underbrace{(i-1)(i+1)}_{i^2-1\,=\,-2}} =$$



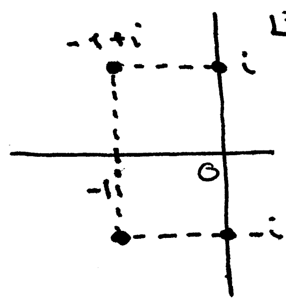
$$= -\frac{\pi i}{2e^{\pi i/4}(1-i)} \cdot \frac{\cancel{2}i}{\cancel{2}} = \frac{\pi}{2e^{i\pi/4}\underbrace{(1-i)}_{\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

3). $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}$$

Encore une intégrale du 2ème type standard, donc

$$I = 2\pi i \sum_{\substack{\text{points singuliers} \\ \text{dans le demi-plan} \\ \text{supérieur}}} \operatorname{res} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$$

Etudions alors la structure des singularités de la fonction $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$. Les points singuliers correspondent aux solutions des équations



$$z^2+1=0 \qquad \text{et} \qquad z^2+2z+2=0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad D = 4-2\cdot 4 = (2i)^2$$

$$z_{1,2} = \pm i \qquad\qquad z_{3,4} = \frac{-2\pm 2i}{2} = -1\pm i$$

(pôles doubles) (pôles simples)

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2(z-[-1+i])(z-[-1-i])}$$

Donc on obtient

$$I = 2\pi i \left\{ \underbrace{\operatorname*{res}_{z=-1+i} f(z)}_{R_1} + \underbrace{\operatorname*{res}_{z=i} f(z)}_{R_2} \right\}$$

Calculons les résidus R_1, R_2 séparément.

a). Comme $z=-1+i$ est un pôle simple, on a

$$R_1 = \lim_{z\to -1+i} \frac{z^2}{(z^2+1)^2\cancel{(z-[-1+i])}(z-[-1-i])} \cdot \cancel{(z-[-1+i])} =$$

$$= \frac{(-1+i)^2}{\Big(\underbrace{(-1+i)^2}_{\substack{\shortparallel \\ -2i}}+1\Big)^2\Big(\underbrace{[-\cancel{1}+i]-[-\cancel{1}-i]}_{2i}\Big)} = -\frac{1}{(1-2i)^2}$$

b). Comme $z=i$ est un pôle double, la procédure du calcul du résidu est plus compliquée ; on écrit tout d'abord

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}\, h(z), \qquad h(z) = \frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}$$

et ensuite on développe $h(z)$ en série de Taylor dans le voisinage de $z=i$:

$$h(z) = a_0 + a_1(z-i) + a_2(z-i)^2 + \ldots$$

$$a_0 = h(z=i), \quad a_1 = \frac{h'(z)}{1!}\Big|_{z=i}, \quad a_2 = \frac{h''(z)}{2!}\Big|_{z=i}, \ \ldots$$

Donc

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}\left\{a_0 + a_1(z-i) + a_2(z-i)^2 + \ldots\right\} =$$

$$= \frac{a_0}{(z-i)^2} + \frac{a_1}{z-i} + a_2 + a_3(z-i) + \ldots$$

et on a par définition de résidu :

$$R_2 = \operatorname*{res}_{z=i} f(z) = a_1 = h'(z)\Big|_{z=i}$$

$$h'(z) = \left(\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right)' = \Big\{2z(z+i)^2(z^2+2z+2) - 2(z+i)(z^2+2z+2)z^2 - 2(z+i)^2(z+1)z^2\Big\}\Big/(z+i)^4(z^2+2z+2)^2$$

$$= \frac{2z(z+i)(z^2+2z+2) - 2z^2(z^2+2z+2) - 2(z+i)(z+1)z^2}{(z+i)^3(z^2+2z+2)^2} =$$

$$= \frac{2iz(z^2+2z+2) - 2(z+i)(z+1)z^2}{(z+i)^3(z^2+2z+2)^2} = 2z\,\frac{i(z^2+2z+2) - z(z+i)(z+1)}{(z+i)^3(z^2+2z+2)^2}$$

$$h'(z)\Big|_{z=i} = 2i\,\frac{i(1+\cancel{2i}) + \overbrace{2(i+\cancel{1})}^{-z(z+i)(z+1)}}{\underbrace{(2i)^3}_{(z+i)^3}\ \underbrace{(1+2i)^2}_{(z^2+2z+2)^2}} = -\frac{3i}{4(1+2i)^2}$$

Alors

$$R_2 = -\frac{3i}{4(1+2i)^2}$$

$$R_1 + R_2 = -\frac{1}{(1-2i)^2} - \frac{3i}{4(1+2i)^2} = -\frac{4(-\cancel{3}+4i)+3i(-3-\cancel{4i})}{4(1-2i)^2(1+2i)^2} =$$

$$= -\frac{7i}{4[1-(2i)^2]^2} = -\frac{7i}{100} \Rightarrow I = 2\pi i\cdot\frac{(-7i)}{100} = \frac{7\pi}{50}$$

4). $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}$

(intégrale du 1er type standard)

Après le changement de variables

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = i e^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

on obtient

$$I = \oint_{\substack{|z|=1 \\ \circlearrowleft}} \frac{dz}{iz} \cdot \frac{1}{3 - (z + z^{-1}) + \frac{z - z^{-1}}{2i}} =$$

$$= \oint_{\substack{|z|=1 \\ \circlearrowleft}} \frac{dz}{3iz - i(z^2 + 1) + \frac{z^2 - 1}{2}} = \oint_{\substack{|z|=1 \\ \circlearrowleft}} \frac{dz}{(\frac{1}{2} - i)z^2 + 3iz - (\frac{1}{2} + i)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{d'après le} \\ \text{théorème de résidus} \end{array} \right| = 2\pi i \sum_{\substack{\text{singularités} \\ \text{à l'intérieur} \\ \text{de } |z|=1}} \operatorname{res} \frac{1}{(\frac{1}{2} - i)z^2 + 3iz - (\frac{1}{2} + i)}$$

Etudions la structure des singularités de la fonction

$f(z) = \dfrac{1}{(\frac{1}{2} - i)z^2 + 3iz - (\frac{1}{2} + i)}$. Elles correspondent aux solutions de l'équation

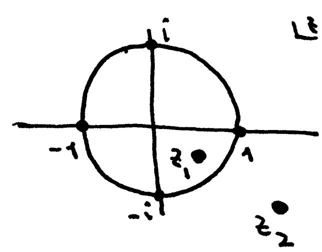
$$(\tfrac{1}{2} - i)z^2 + 3iz - (\tfrac{1}{2} + i) = 0$$

$$D = -9 + 4(\tfrac{1}{2} - i)(\tfrac{1}{2} + i) = -9 + 4(\tfrac{1}{4} - (i)^2) = -9 + 5 = (2i)^2$$

pôles simples de $f(z)$

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{-3i + 2i}{2(\frac{1}{2} - i)} = \dfrac{-i}{1 - 2i} \\[2ex] z_2 = \dfrac{-3i - 2i}{2(\frac{1}{2} - i)} = \dfrac{-5i}{1 - 2i} \end{array} \right\} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(\frac{1}{2} - i)(z - z_1)(z - z_2)}$$

Notons aussi que $|z_1| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $|z_2| = \dfrac{5}{\sqrt{1 + 2^2}} = \sqrt{5}$; donc z_1 se trouve à l'intérieur du cercle $|z| = 1$ et z_2 se trouve à l'extérieur. Donc:



$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z = z_1} f(z) =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to z_1} \cancel{(z - z_1)} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2} - i)\cancel{(z - z_1)}(z - z_2)}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2} - i)(z_1 - z_2)} = 2\pi i \frac{1}{(\frac{1}{2} - i)} \cdot \frac{1 - 2i}{4i} =$$

$$= \frac{4\pi i}{4i} = \pi$$

Exercice 2

$$I = \oint_{\substack{|z|=1 \\ \circlearrowleft}} \frac{\sin z}{z^4}\, dz = \left| \begin{array}{l} \text{d'après le} \\ \text{théorème de résidus} \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi i \sum_{\substack{\text{singularités} \\ \text{à l'intérieur} \\ \text{de } |z|=1}} \operatorname{res} \frac{\sin z}{z^4}$$

La fonction $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ a un pôle triple en $z=0$; il n'y a pas d'autres singularités. Donc

$$I = 2\pi i \underbrace{\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^4}}_{R}$$

D'autre part

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \underbrace{\left\{ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right\}}_{\substack{\text{développemen de Taylor} \\ \text{de } \sin z \text{ en } z=0}} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{z}{5!} - \dots$$

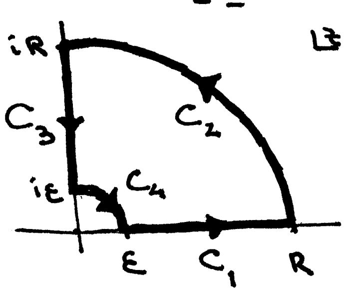
et par conséquent $R = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6} \Rightarrow I = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{i\pi}{3}.$

Exercice 3

1). $$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i} \Big\{ \underbrace{\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{ix}}{x}\, dx}_{I_+} - \underbrace{\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-ix}}{x}\, dx}_{I_-} \Big\}$$

a). $$I_+ = \lim_{R\to\infty} \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$$



- introduisons les contours C_2, C_3, C_4 (ici C_2 et C_4 représentent un quart du cercle de rayon R et ε)
- d'après le théorème de résidus

$$\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{C_4} \frac{e^{iz}}{z}\, dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{\substack{\text{points} \\ \text{singuliers} \\ \text{à l'intérieur} \\ \text{de } |z|=1}} \operatorname{res} \frac{e^{iz}}{z} = \left| \begin{array}{l} \text{comme il n'y a pas} \\ \text{de tels points singuliers} \end{array} \right| = 0$$

- $$\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \left| \begin{array}{l} \text{comme } \frac{1}{z} \to 0 \text{ lorsque } |z|\to\infty, \\ \text{on peut appliquer le lemme} \\ \text{de Jordan} \end{array} \right| = 0$$

- $$\int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \left| \begin{array}{l} \text{paramétrisation:} \\ z = is,\ dz = i\,ds \\ s \in [R, \varepsilon] \end{array} \right| = \int_R^\varepsilon \frac{e^{-s}}{is}\, i\,ds = -\int_\varepsilon^R \frac{e^{-s}}{s}\, d$$

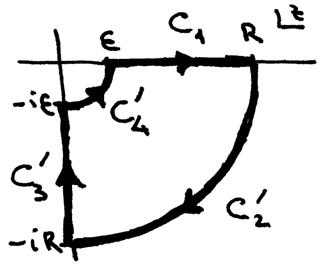
Par conséquent:

$$I_+ = \lim_{R\to\infty}\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{z}dz = -\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C_3}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{z}dz\right)=$$

$$= -\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{z}dz - \lim_{R\to\infty}\int_{C_3}\frac{e^{iz}}{z}dz = -\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-s}}{s}ds.$$

b). Maintenant nous allons effectuer des manipulations similaires avec I_-:

$$I_- = \lim_{R\to\infty}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{-ix}}{x}dx =$$



$$= \lim_{R\to\infty}\int_{C_1}\frac{e^{-iz}}{z}dz$$

Nous avons

$$I_- = \left|\begin{array}{l}\text{d'après le}\\ \text{théorème de résidus}\end{array}\right| = -\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_2'}\frac{e^{-iz}}{z}dz+\int_{C_3'}\frac{e^{-iz}}{z}dz+\int_{C_4'}\frac{e^{-iz}}{z}dz\right)$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{d'après le}\\ \text{lemme de Jordan}\end{array}\right| = -\int_{C_4'}\frac{e^{-iz}}{z}dz - \lim_{R\to\infty}\int_{C_3'}\frac{e^{-iz}}{z}dz$$

Paramétrisation de C_3':

$z=-is$, $dz=-i\,ds$, $s\in[+R,\varepsilon]$

$$\int_{C_3'}\frac{e^{-iz}\,dz}{z} = \int_{R}^{\varepsilon}\frac{e^{-s}}{-is}(-i)ds = -\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{-s}}{s}ds$$

et alors

$$I_- = -\int_{C_4'}\frac{e^{-iz}}{z}dz+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-s}}{s}ds$$

Par conséquent on obtient

$$I = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2i}(I_+-I_-) = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2i}\left\{-\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{z}dz+\cancel{\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-s}}{s}ds}\right.$$

$$\left.+\int_{C_4'}\frac{e^{-iz}}{z}dz-\cancel{\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-s}}{s}ds}\right\}=$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2i}\left\{-\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C_4'}\frac{e^{-iz}}{z}dz\right\}$$

Paramétrisation de C_4:

$z=\varepsilon e^{it}$, $dz=i\varepsilon e^{it}dt$

$t\in[\pi/2,0]$

Paramétrisation de C_4':

$z=\varepsilon e^{it}$, $dz=i\varepsilon e^{it}dt$

$t\in[-\pi/2,0]$

Ceci permet d'écrire:

$$I=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2i}\left\{-\int_{\pi/2}^{0}\frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\cancel{\varepsilon e^{it}}}\cdot i\cancel{\varepsilon e^{it}}dt+\int_{-\pi/2}^{0}\frac{e^{-i\varepsilon e^{it}}}{\cancel{\varepsilon e^{it}}}\,i\cancel{\varepsilon e^{it}}dt\right\}=$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i} \left\{ i \int_0^{\pi/2} e^{i\varepsilon e^{it}} dt + \int_{-\pi/2}^{0} e^{-i\varepsilon e^{it}} dt \right\} =$$

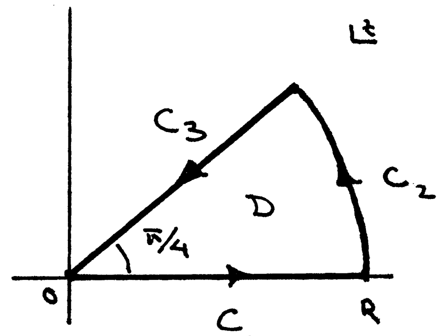
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\pi/2} dt + \int_{-\pi/2}^{0} dt \right\} = \frac{\pi}{2}.$$

2). $I_1 = \int_0^{\infty} \sin x^2 \, dx \quad , \quad I_2 = \int_0^{\infty} \cos x^2 \, dx$

$$I_1 = \frac{1}{2i} \Big\{ \underbrace{\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx}_{I_+} - \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-ix^2} dx}_{I_-} \Big\} , \quad I_2 = \frac{1}{2}(I_+ + I_-)$$

Calculons alors $I_{\pm}$.

a). $I_+ = \lim_{R \to \infty} \int_{C_1} e^{iz^2} dz$



Comme la fonction $f(z) = e^{iz^2}$ n'a pas de singularités sur $\mathbb{C}$ (et en particulier dans le domaine D délimité par C_1, C_2 et C_3), on a d'après le théorème de résidus:

$$\int_{C_1} e^{iz^2} dz + \int_{C_2} e^{iz^2} dz + \int_{C_3} e^{iz^2} dz = 2\pi i \sum_{\substack{\text{singularités} \\ \text{dans } D}} \text{res } e^{iz^2} = 0$$

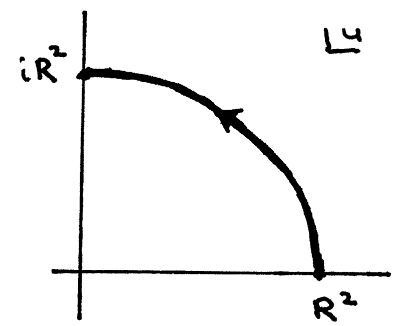
$$\Downarrow$$

$$\int_{C_1} e^{iz^2} dz = - \int_{C_2} e^{iz^2} dz - \int_{C_3} e^{iz^2} dz$$

On suppose que C_2 est un arc du cercle de rayon R.

- d'aprés le lemme de Jordan

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_2} e^{iz^2} dz = 0$$



Pour justifier, il suffit de faire changement de variables

$z^2 = u \Rightarrow 2z\,dz = du \Rightarrow dz = \frac{du}{2\sqrt{u}}$

$$\int_{C_2} e^{iz^2} dz = \int_{\tilde{C}_2} e^{iu} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} du$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{u}} \to 0$ lorsque $|u| \to \infty$, les conditions du lemme sont vérifiées.

- Paramétrisation de C_3 :

$$z = e^{i\pi/4} s \quad , \quad dz = e^{i\pi/4} ds, \quad s \in [+R, 0]$$

et alors

$$e^{iz^2} = e^{i\, e^{i\pi/4} s \cdot e^{i\pi/4} s} = e^{i \cdot e^{i\pi/2} s^2} = e^{i \cdot i s^2} = e^{-s^2}$$

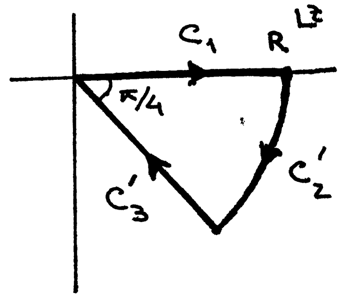
$$\int_{C_3} e^{iz^2} dz = \int_R^0 e^{-s^2} \cdot e^{i\pi/4} ds = - e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-s^2} ds$$

Maintenant on peut écrire

$$I_+ = \lim_{R\to\infty}\int_{C_1} e^{iz^2}dz = \underbrace{-\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} e^{iz^2}dz}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{C_3} e^{iz^2}dz}_{=-e^{i\pi/4}\int_0^\infty e^{-s^2}ds} =$$

$$= e^{i\pi/4}\int_0^\infty e^{-s^2}ds$$

b). $$I_- = \lim_{R\to\infty}\int_{C_1} e^{-iz^2}dz = \left|\begin{array}{l}\text{de façon}\\ \text{analogue à}\\ \text{la précédente}\end{array}\right| =$$



$$= \underbrace{-\lim_{R\to\infty}\int_{C_2'} e^{-iz^2}dz}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \left(\text{lemme de Jordan}\right)} - \lim_{R\to\infty}\int_{C_3'} e^{-iz^2}dz =$$

$$= -\lim_{R\to\infty}\int_{C_3'} e^{-iz^2}dz$$

Paramétrisation de C_3' :

$$z = e^{-i\pi/4}s\,,\quad dz = e^{-i\pi/4}ds\,,\quad s\in[+R,0]$$

$$e^{-iz^2} = e^{-i\,e^{-i\pi/4}s\,\cdot\,e^{-i\pi/4}s} = e^{-i\,e^{-i\pi/2}s^2} = e^{(-i)^2s^2} = e^{-s^2}$$

et donc

$$\int_{C_3'} e^{-iz^2}dz = \int_R^0 e^{-s^2}e^{-i\pi/4}ds = -e^{-i\pi/4}\int_0^R e^{-s^2}ds$$

$\Downarrow$

$$I_- = -\lim_{R\to\infty}\left\{-e^{-i\pi/4}\int_0^R e^{-s^2}ds\right\} = e^{-i\pi/4}\int_0^\infty e^{-s^2}ds$$

Il nous reste à calculer $\int_0^\infty e^{-s^2}ds$. Pour cela, il y a une astuce standard:

$$\int_0^\infty e^{-s^2}ds = \frac{1}{2}I_0\,,\quad I_0 = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$$

$$I_0^2 = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx\cdot\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dx\,dy =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{en coordonnées polaires}\\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ dx\,dy\to r\,dr\,d\varphi\\ r\in[0,\infty]\,,\ \varphi\in[0,2\pi]\end{array}\right| = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr =$$

$$= 2\pi\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr = \left|\begin{array}{l}r^2 = t\\ 2r\,dr = dt\end{array}\right| = \pi\int_0^\infty e^{-t}dt = \pi\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^\infty = \pi.$$

Donc $I_0 = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-s^2}ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Maintenant on a

$$I_+ = e^{i\pi/4}\int_0^\infty e^{-s^2}ds = e^{i\pi/4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$I_- = e^{-i\pi/4}\int_0^\infty e^{-s^2}ds = e^{-i\pi/4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$I_1 = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2i}(I_+ - I_-) = \frac{e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}}{2i}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

$$I_2 = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}(I_+ + I_-) = \frac{e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} =$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

3). $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}$.

Changement de variables:

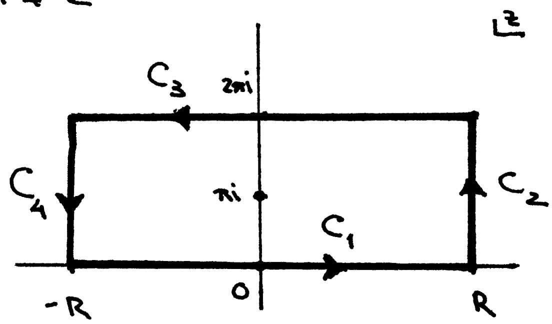
$$x = e^s \Rightarrow dx = e^s ds \quad , \quad s \in [-\infty, \infty]$$

$$x^{p-1}dx = e^{(p-1)s}\,e^s ds = e^{ps}ds$$

et alors

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ps}\,ds}{1+e^s} = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ps}\,ds}{1+e^s} =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{C_1}\frac{e^{pz}\,dz}{1+e^z}$$



- D'après le théorème de résidus:

$$\int_{C_1}\frac{e^{pz}dz}{1+e^z} + \int_{C_2}\frac{e^{pz}dz}{1+e^z} +$$

$$+\int_{C_3}\frac{e^{pz}dz}{1+e^z} + \int_{C_4}\frac{e^{pz}dz}{1+e^z} = 2\pi i \sum_{\substack{\text{singularités}\\ \text{à l'intérieur}\\ \text{du contour}}} \operatorname{res}\frac{e^{pz}}{1+e^z}$$

- Les points singuliers de $f(z) = \dfrac{e^{pz}}{1+e^z}$ correspondent aux solutions de l'équation

$$e^z + 1 = 0 \Rightarrow e^z = e^{i\pi} \Rightarrow z = i\pi + 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$$

(pôles simples de $f(z)$)

Le seul point singulier à l'intérieur du contour est $z = i\pi$, donc

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i\pi}\frac{e^{pz}}{1+e^z}$$

- Calculons le résidu en $z=i\pi$; comme c'est un pôle simple, on a :

$$\operatorname*{res}_{z=i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z} = \lim_{z\to i\pi} (z-i\pi)\frac{e^{pz}}{1+e^z} = e^{ip\pi} \lim_{z\to i\pi} \frac{z-i\pi}{e^z+1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{d'après le} \\ \text{théorème de} \\ \text{l'Hopital} \end{array} \right| = e^{ip\pi} \lim_{z\to i\pi} \frac{(z-i\pi)'}{(e^z+1)'} =$$

$$= e^{ip\pi} \lim_{z\to i\pi} \frac{1}{e^z} = e^{ip\pi}\cdot e^{-i\pi} = -e^{ip\pi}.$$

Donc :

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = 2\pi i \cdot (-e^{ip\pi})$$

- Notons aussi que

$$\int_{C_3} \frac{e^{pz}\,dz}{1+e^z} = \left| \begin{array}{l} \text{paramétrisation de } C_3: \\ z = s+2\pi i,\ s\in[R,-R] \\ dz = ds \end{array} \right| =$$

$$= \int_R^{-R} \frac{e^{ps+2\pi i p}\,ds}{1+e^{s+2\pi i}} = \left| \begin{array}{l} \text{comme} \\ e^{2\pi i}=1 \end{array} \right| = -e^{2\pi i p}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ps}\,ds}{1+e^s} =$$

$$= -e^{2\pi i p}\int_{C_1} \frac{e^{pz}\,dz}{1+e^z}$$

Conséquence :

$$(*) \qquad (1-e^{2\pi i p})\int_{C_1} \frac{e^{pz}\,dz}{1+e^z} + \int_{C_2}\frac{e^{pz}\,dz}{1+e^z} + \int_{C_4}\frac{e^{pz}\,dz}{1+e^z} = -2\pi i e^{ip\pi}$$

- Considérons $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\frac{e^{pz}\,dz}{1+e^z}$:

Paramétrisation de C_2 : $z = R+is,\ s\in[0,2\pi] \Rightarrow dz = i\,ds$

Alors

$$\int_{C_2}\frac{e^{pz}\,dz}{1+e^z} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{p(R+is)}}{1+e^{R+is}}\,i\,ds = e^{pR}\int_0^{2\pi}\frac{i e^{ips}\,ds}{1+e^{R+is}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\int_{C_2}\frac{e^{pz}\,dz}{1+e^z}\right| \le e^{pR}\int_0^{2\pi}\left|\frac{i e^{ips}\,ds}{1+e^{R+is}}\right| = e^{pR}\int_0^{2\pi}\frac{ds}{|1+e^R\cos s + ie^R\sin s|}$$

$$= e^{pR}\int_0^{2\pi}\frac{ds}{\sqrt{(1+e^R\cos s)^2+(e^R\sin s)^2}} = e^{pR}\int_0^{2\pi}\frac{ds}{\sqrt{1+e^{2R}+2e^R\cos s}}$$

$$\le e^{pR}\int_0^{2\pi}\frac{ds}{\sqrt{1+e^{2R}-2e^R}} = \frac{e^{pR}}{\sqrt{(e^R-1)^2}}\int_0^{2\pi}ds = \frac{e^{pR}}{e^R-1}\cdot 2\pi$$

et donc

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_2}\frac{e^{pz}\,dz}{1+e^z}\right| \le \lim_{R\to\infty}\frac{e^{pR}}{e^R-1}\cdot 2\pi = \lim_{R\to\infty}\frac{e^{(p-1)R}}{1-e^{-R}}\cdot 2\pi = 0$$

- De façon analogue, on considère $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_4} \frac{e^{pz}}{1+e^z}dz$.

Paramétrisation de C_4 : $z = -R + is$, $s \in [2\pi, 0]$, $dz = i\,ds$ et donc

$$\int_{C_4} \frac{e^{pz}}{1+e^z}dz = \int_{2\pi}^{0} \frac{e^{p(-R+is)}\, i\,ds}{1+e^{-R+is}} = -e^{-pR}\int_0^{2\pi} \frac{i e^{ips}\,ds}{1+e^{-R+is}}$$

$$\Rightarrow \left|\int_{C_4} \frac{e^{pz}}{1+e^z}dz\right| \leq e^{-pR}\int_0^{2\pi}\left|\frac{ie^{ips}}{1+e^{-R+is}}\right|ds = e^{-pR}\int_0^{2\pi}\frac{ds}{|1+e^{-R}\cos s + ie^{-R}\sin s|} =$$

$$= e^{-pR}\int_0^{2\pi}\frac{ds}{\sqrt{(1+e^{-R}\cos s)^2+(e^{-R}\sin s)^2}} = e^{-pR}\int_0^{2\pi}\frac{ds}{\sqrt{1+e^{-2R}+2e^{-R}\cos s}} \leq$$

$$\leq e^{-pR}\int_0^{2\pi}\frac{ds}{\sqrt{1+e^{-2R}-2e^{-R}}} = \frac{e^{-pR}}{\sqrt{(1-e^{-R})^2}}\int_0^{2\pi}ds = \frac{e^{-pR}}{1-e^{-R}}\cdot 2\pi$$

Par conséquent

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_4}\frac{e^{pz}dz}{1+e^z}\right| \leq \lim_{R\to\infty}\frac{e^{-pR}}{1-e^{-R}}\cdot 2\pi = 0$$

Enfin considérons la limite de la relation (*) lorsque $R\to\infty$:

$$(1-e^{2\pi i p})\underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}\frac{e^{pz}dz}{1+e^z}}_{=I} + \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\frac{e^{pz}dz}{1+e^z}}_{=0}$$

$$+ \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{C_4}\frac{e^{pz}dz}{1+e^z}}_{=0} = -2\pi i\, e^{ip\pi}.$$

Donc :

$$(1-e^{2\pi i p})\, I = -2\pi i\, e^{ip\pi} \Rightarrow I = \pi\,\frac{2i\,e^{ip\pi}}{e^{2ip\pi}-1} =$$

$$= \pi\cdot\frac{2i}{e^{ip\pi}-e^{-ip\pi}} = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$